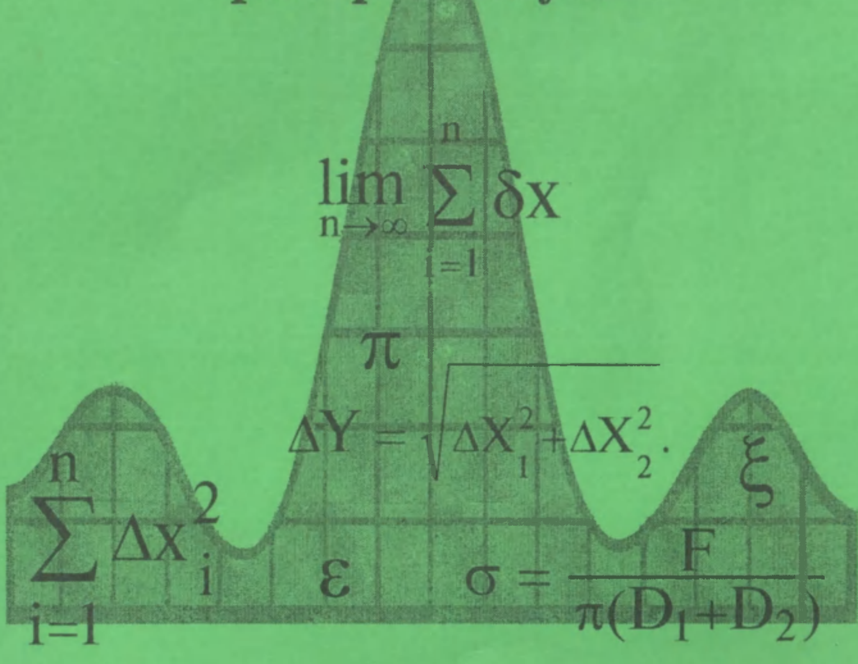
**Емельянов В.А.**
**Лин Д.Г.**
**Шолох В.Ф.**

# Методы обработки результатов измерений в лаборатории физпрактикума




**Минск**
**1997**

ББК 22.3 я73
Е 60
УДК 530.8 (075.8)

Рецензенты: кафедра физики Гомельского политехнического института, доктор физико-математических наук Белый В.Н. (ИФ АН РБ)

Емельянов В.А. и др.

Методы обработки результатов измерений в лаборатории физпрактикума: Учеб. пособие/ Емельянов В.А., Лин Д.Л., Шолох В.Ф. - Мн.: Бестпринт, 1997.-90 с.
**ISBN 985-6227-22-4**

*Излагаются методы обработки и анализа результатов физических измерений, даются элементы теории приближенных вычислений, рассматриваются простейшие приемы графического представления полученных опытным путем данных.*

*Приводятся рекомендации по оформлению отчета по работам физпрактикума, задачи и упражнения для закрепления изложенных методов.*

*Для студентов естественных и технических специальностей вузов.*

Е $\frac{530080\ 0000-}{М\ 304(03)-97}$ Зак. изд. - 97 ББК 22.3 я73

ISBN 985-6227-22-4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**1. Основные понятия теории измерений ...................... 7**

1.1. Понятие об измерении. Виды измерений ........ 7

1.2. Наилучшее значение измеренной величины. Погрешность измерений ................................ 9

1.3. Основные виды погрешностей измерений и их особенности ................................................ 14

**2. Оценка погрешности прямых измерений ................ 17**

2.1. Составляющие погрешности прямого измерения. Полная погрешность прямого измерения ................................................... 17

2.2. Понятие о законе нормального распределения. Оценка случайной составляющей погрешности прямого измерения ................... 20

2.3. Выявление промахов ........................................ 30

2.4. Оценка погрешностей средств измерений ........ 33

2.5. Порядок обработки результатов прямых измерений ........................................................ 38

**3. Оценка погрешности косвенных измерений ............... 44**

3.1. Постановка задачи .......................................... 44

3.2. Простейшие правила расчета погрешностей .... 45

3.3. Метод "шаг за шагом" ....................................... 48

3.4. Общие формулы для оценки погрешностей косвенных измерений ..................................... 51

3.5. Порядок выполнения и обработки результатов комплексных измерений ................................ 57

**4. Элементы теории приближенных вычислений .......... 62**
4.1. Основные определения. Вычисления с приближенными числами .......... 62
4.2. Приближенные числа справочных таблиц .......... 68
4.3. Как приводить и использовать погрешности ... 69
**5. Графические методы представления результатов измерений .......... 72**
5.1. Требования, предъявляемые к графикам .......... 72
5.2. Понятие о методе наименьших квадратов .......... 73
5.3. Метод парных точек .......... 78
**6. Выполнение работ физпрактикума и оформление отчетов .......... 80**
6.1. Подготовка к работе и ее выполнение .......... 80
6.2. Составление отчета .......... 81
**7. Приложения .......... 82**
7.1. Задачи и упражнения .......... 82
7.2. Ответы и указания .......... 88
**Литература .......... 90**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

*Учебная работа в лабораториях физпрактикума, является неотъемлемой частью обучения студентов физических и инженерных специальностей университетов и технических вузов, и уже на первых курсах требует от них умения оценить ошибки выполненных измерений. Однако изучаемые в средней школе методы, необходимые для достижения этой цели, оказываются явно недостаточными. В предлагаемом пособии излагаются сведения, позволяющие решить эту задачу. По сути дела это - элементарное руководство, в котором на доступных примерах объясняются основные понятия, идеи и методы теории погрешностей и выводятся рабочие формулы на основе здравого смысла и элементарных понятий теории вероятности и математической статистики. Конечно, такое изложение не является математически строгим, и оно ни в коем случае не подменяет точные статистические методы, используемые в современных научных исследованиях и производстве. Не является оно и оригинальным. Однако другие аналогичные пособия уже давно стали библиографической редкостью и практически не доступны студентам.*

*Характер изложения материала в пособии рассчитан на первоначальное изучение методов количественной оценки погрешностей и измерений и не требует глубокого знания математического анализа и других дисциплин высшей математики. Стремясь достичь основной цели - научить читателя практическому вычислению ошибок измерений, мы* *включили в пособие большое число простых примеров, иллюстрирующих основные понятия и методы, изложенные в книге. В конце пособия приведены задачи для самостоятельного решения. Все они снабжены ответами и указаниями.*

*Данное пособие предназначено в первую очередь для студентов младших курсов физических факультетов университетов и techинститутов. Однако круг его пользователей значительно шире. Оно может быть полезно студентам технических вузов, а также учащимся средних специальных учебных заведений и старшеклассникам. Мы надеемся, что студент, овладевший материалом пособия, будет знать и понимать почти все аспекты теории ошибок, с которыми он может встретится в лабораториях.*

*Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220048, Минск, пр. Машерова, 11, издательство "Вышэйшая школа".*

*Авторы*

# 1. Основные понятия теории измерений

## 1.1. Понятие об измерении. Виды измерений

Одна из основных задач изучения физики состоит в овладении методами экспериментального исследования физических процессов и явлений. Для решения этой задачи в высших учебных заведениях вводится лабораторный практикум, главная цель которого - дать студентам возможность приобрести навыки в проведении эксперимента, обработке результатов и их анализе. Каждый такой эксперимент сопровождается измерениями целого ряда различных величин.

***Измерением*** называют процесс получения опытным путем числового соотношения между измеряемой величиной, характеризующей некоторый объект или явление, и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения. ***Единицей измерения*** физической величины называется величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице. Оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения называется ***значением физической величины*** .

По способу определения значения физической величины измерения делятся на ***прямые*** и ***косвенные***.

Под ***прямыми измерениями*** понимают измерения, при которых значение искомой физической величины находится непосредственно из опыта с помощью специальных технических средств (мер, измерительных приборов и др.), например, измерение длины линейкой, времени -

секундомером, силы тока - амперметром.

Как правило, в результате прямого измерения имеет место взаимное влияние измеряемого объекта и средства измерения. При этом важным условием верного результата является требование неизменности состояний объекта и средств измерения в процессе измерения. Чтобы эта неизменность была гарантирована в той или иной степени, разрабатывают специальную ***методику измерений***, т.е. совокупность приемов использования средств измерения, подготовки объекта к измерениям и условий измерения.

***Косвенные измерения*** - это измерения, результат которых получается на основе прямых измерений ряда величин $x_1$, $x_2$, ..., $x_N$, связанных с искомой величиной y известной функциональной зависимостью

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad (1)$$

Так, для определения средней линейной плотности σ тонкого металлического стержня можно осуществить прямые измерения его массы *m* и длины *l* и вычислить искомую плотность σ по формуле $\sigma = m / l$.

К косвенным измерениям прибегают в случаях, когда прямые измерения невозможны, черезмерно сложны или не обеспечивают необходимой точности и надежности результата.

## 1.2. Наилучшее значение измеренной величины. Погрешность измерений

При измерении любой физической величины, как бы тщательно мы не выполняли измерения, принципиально невозможно получить ее истинное значение, т.е. свободный от искажений результат. Величина этих искажений и причины их проявления обусловлены разнообразными факторами, например, несовершенством методики и средств измерений, изменениями условий измерений из-за наличия случайных помех, индивидуальными способностями экспериментатора и др.

Искажения, которые получаются при любом измерении, приводит к ***погрешности измерения*** - отклонению результата измерения от истинного значения измеряемой величины. При измерении некоторой величины X в качестве оценки этого отклонения можно было бы взять разность

$$\delta x = x_{изм} - x_{ист} , \qquad (2)$$

где $X_{изм}$ и $X_{ист}$ - измеренное и истинное значения величины x соответственно. Но значение $X_{ист}$ в (2) неизвестно и, как упоминалось выше, принципиально не может быть определено.

Выход из создавшегося положения подсказывает анализ результатов простого опыта. Предположим, что мы измерили период колебаний математического маятника один раз и получили значение 2,3 с. В этом случае вопрос о величине погрешности измерения поставит нас в затруднительное положение. Однако если мы повторим измерения еще один раз и получим значение периода 2,4 с, то можем с уверенностью сказать, что ошибка измерения, вероятно, равна 0,1 с. Отсюда ясно, что для того, чтобы что-то сказать о значении погрешности, измерения надо повторить несколько раз, т.е. выполнить ***серию измерений*** .

Пусть серия измерений величины X состоит из n измерений, а $X_i$ - значение этой величины, найденное в результате i-го измерения. Тогда, согласно (2), отклонение результата i-го измерения от истинного значения величины X

$$\delta X_i = X_i - X_{ист} . \qquad (3)$$

Сложив все равенства (3), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \delta X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{ист} ,$$

откуда для $X_{ист}$ получим

$$X_{ист} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta X_i = \bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta X_i , \qquad (4)$$

где $\bar{X}$ - среднее арифметическое отдельных измерений.

Опыт показывает, что при очень большом числе измерений n случайные отклонения $\delta X_i$, равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто, причем малые отклонения случаются чаще, чем большие. Следовательно, при бесконечно большом числе измерений

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = 0.$$

В этом случае из формулы (4) следует

$$x_{ист} = \bar{x} \,. \qquad (5)$$

На практике невозможно осуществить бесконечно большое число измерений, поэтому равенство (5) выполняется лишь приближенно. Однако в случае конечного числа измерений выражение (5) указывает на то, что в качестве наилучшего значения измеряемой величины $x$ следует взять среднее арифметическое $\bar{x}$ результатов серии из $n$ измерений, т.е.

$$x_{наил} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (6)$$

Тогда за оценку отклонений этого наилучшего значения от истинного разумно принять значение верхнего предела погрешностей отдельных измерений

$$\Delta X = \max\{|X_i - \bar{X}|\} = \max\{|\Delta X_i|\}, \qquad (7)$$

а результат измерений записать в следующем виде

$$X = \bar{X} \pm \Delta X \ . \qquad (8)$$

Эту запись следует понимать как неравенство

$$\bar{X} - \Delta X \le X_{ист} \le \bar{X} + \Delta X \ . \qquad (9)$$

Записанный результат означает, что при последующих измерениях величины X мы должны получить значения, лежащие в интервале $[\bar{X} - \Delta X;\ \bar{X} + \Delta X]$, который называют ***доверительным интервалом***. Но все ли последующие значения попадут в этот интервал? Если не все, то необходимо узнать, сколько из них попадет в этот интервал, а сколько - нет. Иными словами, необходимо узнать ***надежность результата*** (9), показывающую, с какой вероятностью вновь измеренное значение величины X попадает в доверительный интервал.

Для этой цели в теории погрешностей вводится понятие ***доверительной вероятности*** $\alpha$ измеренного результата. Например, $\alpha = 0{,}92$ означает, что при последующих измерениях величины X результаты 92 измерений из 100 должны попасть в доверительный интервал. При обработке результатов эксперимента доверительная вероятность задается экспериментатором. В большинстве учебно-исследовательских работ целесообразно задавать значение доверительной вероятности $\alpha$, равное 0,90-0,98. Нетрудно понять, что выбор значения доверительной вероятности будет оказывать влияние на ширину доверительного интервала. Так, большему значению $\alpha$ должен соответствовать более широкий интервал $[\bar{X} - \Delta X ; \bar{X} + \Delta X]$.

Величина $\Delta X$, равная полуширине доверительного интервала, получила название ***абсолютной погрешности*** результата измерений. Кроме абсолютной погрешности $\Delta X$, используют также ***относительную погрешность*** измерения

$$\varepsilon = \Delta X / X . \qquad (10)$$

Относительная погрешность характеризует качество (точность) выполненных измерений независимо от измеренной величины. Обычно относительную погрешность выражают в процентах. Так, $\varepsilon = 2\%$ означает, что абсолютная погрешность $\Delta X$ составляет две сотых самой величины X. Кроме наглядности, относительная погрешность обладает теми преимуществами, что является безразмерной величиной и в ряде случаев (см.3.1) оказывается более удобной при расчетах погрешностей косвенных величин, чем абсолютная погрешность.

## 1.3. Основные виды погрешностей измерений и их особенности

В зависимости от источников погрешностей измерения различают методические погрешности, порождаемые несовершенством методики измерения, и инструментальные, или приборные, погрешности, обусловленные несовершенством технических средств, используемых при измерении. По характеру проявления ошибки делятся на ***систематические***, ***случайные***, ***грубые*** или ***промахи***.

***Систематические ошибки*** - это ошибки, величина и знак которых остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Источниками систематических ошибок, как правило, являются упомянутые выше методические и инструментальные погрешности. Примерами методических ошибок, имеющих систематический характер, могут служить: отклонения объекта, подвергаемого измерению, от принятой идеальной модели; использование упрощающих предположений и приближенных формул при описании физических явлений и расчетах результатов косвенных измерений физических величин. Так, в учебно-исследовательских работах часто пренебрегают силами трения, растяжения и массой нитей, сопротивлением соединительных проводов и контактов при измерениях физических величин с помощью электрических цепей. Примерами инструментальных ошибок систематического характера являются ошибки, обусловленные несовпадением исходного положения указателя с нулевой отметкой шкалы прибора; несоответствием условий эксплуатации прибора нормальным; несоответствием действительного значения меры, с помощью которой выполняются измерения, ее номинальному значению; погрешностями в изготовлении шкал приборов и др.

При выполнении измерений необходимо иметь в виду, что систематические погрешности способны существенно исказить результат измерения и не могут быть уменьшены путем увеличения числа повторных измерений. Уменьшить систематические погрешности можно путем введения поправок к результату измерения. Поправки можно вычислить в том случае, если выявлено существование систематических погрешностей, вскрыты их действительные причины, известны закономерности, определяющие их значение. Поэтому прежде, чем приступать к измерению, необходимо выяснить все возможные источники систематических погрешностей и принять меры к их устранению или определению. Практически, разумеется, полностью исключить систематические ошибки невозможно.

***Случайные ошибки*** - это ошибки, величина и знак которых изменяются случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Факторы, вызывающие появление случайных ошибок, проявляются неодинаково при различных повторных измерениях. В силу случайного характера их проявления оказать на них целенаправленное воздействие невозможно. Однако с помощью теории вероятностей и методов статистики случайные погрешности измерений могут быть количественно определены и охарактеризованы в их совокупности, причем тем надежнее, чем больше число измерений одной и той же величины в серии измерений. Если при повторении измерений получаются одинаковые числовые значения, то это указывает не на отсутствие случайных погрешностей, а на недостаточную точность и чувствительность метода или средства измерений.

***Грубые ошибки*** или ***промахи*** - это погрешности измерения, значительно превышающие по величине ожидаемую при данных условиях погрешность. Источниками грубых ошибок могут служить неправильные действия экспериментатора, резкое кратковременное нарушение условий измерений и др. Например, запись экспериментатором значения 31 вместо 81, снятие показаний вольтметра в момент резкого изменения напряжения в сети. Статистические критерии, с помощью которых выявляются промахи, будут рассмотрены ниже (см.2.3). Промахи могут быть выявлены также путем самоконтроля и повторных наблюдений. Очевидно, что измерения, содержащие промахи, должны исключаться из рассмотрения как не заслуживающие доверия.

## 2. Оценка погрешности прямых измерений

### 2.1. Составляющие погрешности прямого измерения. Полная погрешность прямого измерения

В соответствии с источниками и характером ошибок, при оценке погрешности прямого измерения можно выделить следующие этапы:

- определение и учет поправок, связанных с наличием систематических ошибок;
- определение погрешностей средств измерения;
- вычисление случайной погрешности;
- выявление промахов;
- определение полной погрешности прямого измерения.

Как уже отмечалось выше, промахи всегда исключаются из рассмотрения. Поэтому в тех случаях, когда систематические ошибки, порождаемые известными причинами, устранены, вклад в значение полной погрешности прямого измерения $\Delta X$ определяется величиной случайной погрешности $\Delta X_{сл}$ и величиной приборной погрешности средств измерения $\Delta X_{пр}$. Величины $\Delta X_{сл}$ и $\Delta X_{пр}$ , которые обычно называют ***составляющими погрешности прямого измерения***, обусловлены независимыми причинами.

В теории вероятностей показано [2], что в случае независимых составляющих полная погрешность прямого измерения $\Delta X$ может быть вычислена по формуле

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{сл}^2 + \Delta X_{пр}^2} \qquad (11)$$

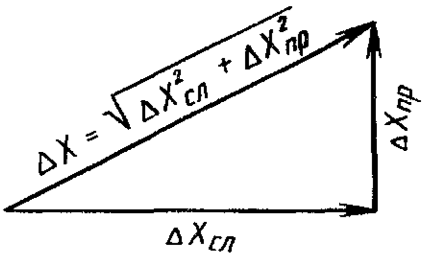



Рис. 1

На рис.1 приведена геометрическая интерпретация правила вычисления полной погрешности $\Delta X$ по формуле (11). Очевидное неравенство

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{сл}^2 + \Delta X_{пр}^2} < \Delta X_{сл} + \Delta X_{пр}, \text{ которому}$$

удовлетворяют стороны треугольника, показывает, что при вычислениях по формуле (11) мы всегда будет получать результат меньше, чем при непосредственном сложении составляющих погрешности. Это обстоятельство отражает возможность учитывать в выражении (11) то, что при независимых источниках ошибок переоценка первого слагаемого $\Delta X_{сл}$ может в какой-то мере быть скомпенсирована недооценкой второго слагаемого $\Delta X_{пр}$ и наоборот.

Формула, аналогичная (11), имеет место и для относительной погрешности

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{сл}^{2} + \varepsilon_{пр}^{2}} \qquad (12)$$

При вычислении всех суммируемых погрешностей доверительная вероятность $\alpha$ каждого слагаемого выбирается одинаковой. Такой же она будет и для полной погрешности.

Обратим внимание на одну важную с практической точки зрения особенность вычислений по формулам (11) и (12). Предположим, что в результате выполненных измерений и оценок нами установлено, что $\Delta X_{пр} = 0{,}3\Delta X_{сл}$. Тогда по формуле (11) имеем

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{сл}^{2} + (0{,}3\Delta X_{сл})^{2}} = \Delta X_{сл}\sqrt{1{,}09} = 1{,}04\ \Delta X_{сл} \approx \Delta X_{сл}$$

Приведенный пример показывает, что в тех случаях, когда одно из слагаемых в формулах (11) или (12) в три и более раз меньше второго, то оно практически ничего не добавляет в результат и, следовательно, может быть отброшено.

Отсюда, в частности, следует, что если в результате 2-3 контрольных измерений величины X получены одинаковые значения, то случайная составляющая погрешности пренебрежимо мала и погрешность результата определяется только погрешностью средств измерения $\Delta X_{пр}$.

## 2.2. Понятие о законе нормального распределения. Оценка случайной составляющей погрешности прямого измерения

Будем считать, что в процессе измерения некоторой величины X влияние систематических ошибок сведено до пренебрежимо малого уровня, а имеющие место отклонения $\Delta X_i$, обусловленные случайными ошибками, много меньше измеряемой величины.

В этом случае наиболее полную оценку случайной составляющей $\Delta X_{сл}$ погрешности прямого измерения дают статистические методы, основанные на законе нормального распределения случайных величин, предложенном немецким математиком Гауссом. Исходной точкой для введения нормального распределения является отмеченные в п.1.2 утверждения о равновероятном характере отклонений $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$ в разные стороны и существенном преимуществе малых отклонений по сравнению с большими, возведенные Гауссом в ранг аксиом.

***Закон нормального распределения***, описывающий предельное распределение результатов бесконечно большого числа измерений величины X, истинное значение которой равно $X_{ист}$, имеет вид

$$f_{X_{ист},\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{(-(x - x_{ист})^2 \;/\; (2\sigma)^2} \qquad (13)$$

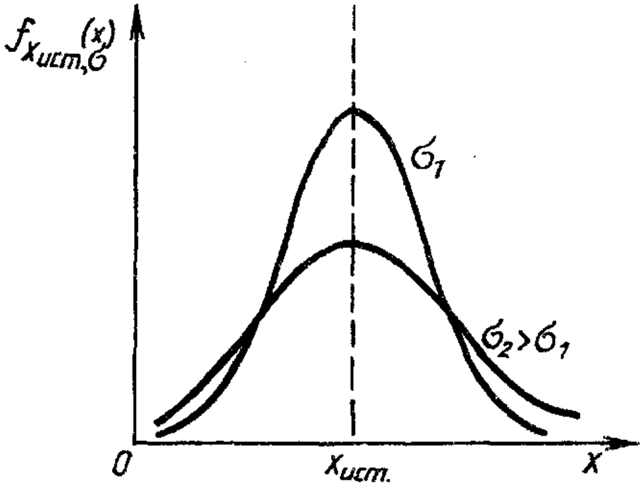



Рис.2.

График функции распределения (13) изображен на рис.2. Он представляет собой симметричную колокообразную кривую (гауссову кривую), достигающую максимума при значении $X = X_{ист}$. Вид этой кривой отражает содержание аксиом, положенных в основу нормального распределения. Параметры $X_{ист}$ и $\sigma$, добавленные в качестве нижних индексов в обозначении функции (13), однозначно определяют положение максимума (центра) и форму гауссовой кривой.

Вычислив вторую производную от функции распределения (13) и приравняв ее к нулю, получим $X_{\pm} = X_{ист} \pm \sigma$. Значения $X_{\pm}$ указывают положение точек перегиба гауссовой кривой относительно ее центра и делят площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком (13) и осью абсцисс, на центральную и периферийную части (рис.3).

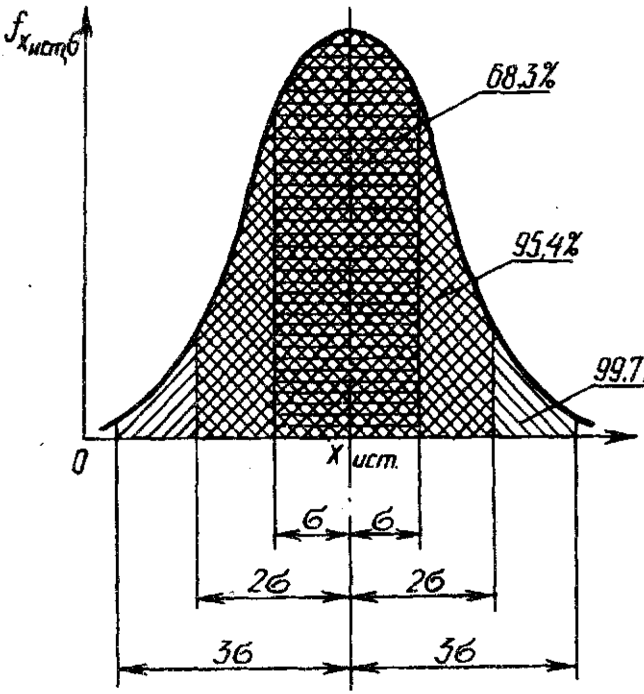



Рис. 3.

Расстояние между точками перегиба, равное $2\sigma$, определяет ширину центральной части. Вычислив площадь последней, нетрудно убедиться, что при любых значениях $\sigma$ и $X_{ист}$ она будет составлять 68,3 % от площади всей криволинейной трапеции. Это означает, что при бесконечно большом числе измерений величины X 68,3 % всех измерений будут давать значения, попадающие в доверительный интервал $[X_{ист} - \sigma;\ X_{ист} + \sigma]$, и только 31,7 % измеренных значений будут лежать вне этого интервала. Иными словами, число 0,683 определяет надежность $\alpha$ попадания измеренного значения в интервал, полуширина которого равна $\sigma$. Такой доверительный интервал называют ***стандартным интервалом***, а параметр $\sigma$ - ***стандартным отклонением нормального распределения***.

При двукратном и трехкратном увеличении ширины стандартного интервала надежность измеренного результата возрастает до 0,954 и 0,997 соответственно, то есть за пределы "трехкратного" интервала $[X_{ист} - 3\sigma;\ X_{ист} + 3\sigma]$, попадает ничтожная доля (0,3 %) всего числа измерений. В общем случае при заданной надежности $\alpha$ полуширина доверительного интервала

$$\Delta X_{сл} = \lambda_\alpha \sigma, \tag{14}$$

где $\lambda_\alpha$ - числовой коэффициент, соответствующий выбранной надежности $\alpha$ выполненных измерений. Некоторые значения $\lambda_\alpha$ приведены в табл.1.

***Табл.1.***

***Значение коэффициентов $\lambda_\alpha$ для различных надежностей***

| $\alpha$ | 0 | 0.2 | 0.38 | 0.55 | 0.68 | 0.79 | 0.87 | 0.92 | 0.954 | 0.988 | 0.997 | 0.999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_\alpha$ | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 4.0 |

Формула (14) указывает, как в рамках нормального распределения можно в принципе оценить полуширину доверительного интервала $\Delta X_{сл}$ при заданной надежности $\alpha$. Напомним, что приведенные выше рассуждения справедливы при бесконечно большом числе измерений величины X, истинное значение которой $X_{ист}$.

Однако практическое применение изложенного метода наталкивается на две трудности: во-первых, нам неизвестно истинное значение измеряемой величины X; во-вторых, в лабораторных условиях невозможно и нецелесообразно повторять измерения бесконечно большое число раз. Учет отмеченных обстоятельств приводит к необходимости некоторых изменений записанных соотношений, цель которых - возможность использования приведенного метода оценки $\Delta X_{сл}$ в реальных ситуациях.

В теории погрешностей [3] показано, что при выполнении n измерений в серии такие изменения сводятся к следующему: истинное значение измеряемой величины X необходимо заменить средним арифметическим измеренных значений

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \qquad (15)$$

вместо стандартного отклонения $\sigma$, следует использовать ***среднеквадратичную ошибку*** $S_{\bar{X}}$ результатов n измерений

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\,. \qquad (16)$$

***Среднеквадратичное отклонение отдельного измерения*** вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \qquad (17)$$

численный коэффициент $\lambda_\alpha$ в (14) требуется заменить на новый множитель $t_{\alpha;\, n}$, названный ***коэффициентом Стьюдента***. Последний отражает необходимость увеличения ширины доверительного интервала при заданной надежности $\alpha$ и конечном $n$ числе измерений. При одном и том же значении $\alpha$ коэффициент $t_{\alpha;\, n}$ растет с уменьшением $n$ (см. табл.2) и при любом конечном $n$ $t_{\alpha;\, n} > \lambda_\alpha$ . В пределе при $n \to \infty$ коэффициент Стьюдента $t_{\alpha;\, \infty}$ совпадает с $\lambda_\alpha$. Практически это справедливо уже при $n \geq 30$.

С учетом приведенных поправок выражение (14) для полуширины доверительного интервала, соответствующего надежности $\alpha$ , принимает вид

$$\Delta X_{сл} = t_{\alpha;\, n} S_{\overline{X}} = t_{\alpha;\, n} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\,. \qquad (18)$$

***Табл.2. Значения коэффициентов Стьюдента*** $t_{\alpha;\,n}$

| Число измерений | Надежность α | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
| 2 | 1,00 | 1,38 | 2,0 | 3,1 | 6,3 | 12,7 | 31,8 | 63,7 |
| 3 | 0,82 | 1,06 | 1,3 | 1,9 | 2,9 | 4,3 | 7,0 | 9,9 |
| 4 | 0,77 | 0,98 | 1,3 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,5 | 5,8 |
| 5 | 0,74 | 0,94 | 1,2 | 1,5 | 2,1 | 2,8 | 3,7 | 4,6 |
| 6 | 0,73 | 0,92 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,6 | 3,4 | 4,0 |
| 7 | 0,72 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3.1 | 3,7 |
| 8 | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3,0 | 3,5 |
| 9 | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,3 | 2,9 | 3,4 |
| 10 | 0,70 | 0,88 | 1,1 | 1,4 | 1,8 | 2,3 | 2,8 | 3,3 |
| 15 | 0,69 | 0,87 | 1,1 | 1,3 | 1,8 | 2,1 | 2,6 | 3,0 |
| 20 | 0,69 | 0,86 | 1,1 | 1,3 | 1,7 | 2,1 | 2,5 | 2,9 |
| ∞ | 0,67 | 0,84 | 1,0 | 1,3 | 1,6 | 2,0 | 2,3 | 2,6 |

Формула (18) является основной для расчета случайной составляющей погрешности прямых измерений.

Рассмотрим некоторые варианты ее использования на конкретных примерах.

***Пример 1.*** При измерении толщины h пластинки микрометром были получены следующие значения (см.табл.3). Определить наилучшее значение результата измерения и случайную погрешность.

*Табл.3. Толщина h пластинки*

| N п/п измерения | $h_i$, мм$^2$ | $\Delta h_i = h_i - \bar{h}$, мм | $\Delta h_i^2$, $10^{-4}$. мм$^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4,02 | +0,019 | 3,61 |
| 2 | 4,07 | +0,069 | 47,61 |
| 3 | 3,96 | -0,041 | 16,81 |
| 4 | 3,89 | -0,111 | 123,21 |
| 5 | 4,00 | -0,001 | 0,00 |
| 6 | 4,05 | +0,049 | 24,01 |
| 7 | 3,94 | -0,061 | 37,21 |
| 8 | 4,03 | +0,029 | 8,41 |
| 9 | 4,12 | +0,119 | 141,61 |
| 10 | 3,93 | -0,071 | 50,41 |
| n=10 | $\bar{h}$=4,001 | $\sum_{i=1}^{10} \Delta h_i = 0$ | $\sum_{i=1}^{10} \Delta h_i^2 = 452{,}89 \cdot 10^{-2}$ |

Р е ш е н и е. 1. По формуле (15) найдем наилучшее значение результата измерения - среднее арифметическое

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} h_i = 4{,}001 \text{ мм.}$$

(Здесь и ниже, согласно правилам действий с приближенными числами при вычислениях сохраняется одна запасная цифра).

2. Определим случайные отклонения отдельных изме-

рений $\Delta h_i = h_i - \bar{h}$, (см. табл.3.) и проверим правильность результатов, вычислив их сумму. Равенство

$$\sum_{i=1}^{10} \Delta h_i = 0$$

указывает на отсутствие ошибки в выполненных расчетах.

3. Вычислим квадраты отдельных отклонений $\Delta h_i^2$ и их сумму.

4. По формуле (16) вычислим среднеквадратичную ошибку выполненной серии измерений толщины h

$$S_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{452{,}89 \cdot 10^{-4}}{10(10-1)}} = 0{,}22 \text{ мм}.$$

5. Зададим надежность результата, например $\alpha=0{,}95$, и по табл.2 найдем соответствующее n=10 значение коэффициента Стьюдента $t_{0,95;10}=2{,}3$.

6. По формуле (18) вычислим случайную погрешность измерений

$$\Delta h_{сл} = t_{0,95;10} S_{\bar{h}} = 2{,}3 \cdot 0{,}022 = 0{,}051 \text{ мм}.$$

Следовательно, h=4,00 мм, $\Delta h_{сл}$=0,05 мм при $\alpha=0{,}95$.

Полученный результат означает, что в тех случаях, когда остальные ошибки пренебрежимо малы по сравнению со случайной, при последующих измерениях толщины пластинки 95 измерений из 100 дадут значение $h$, попадающие в интервал [3,95; 4,05]. Нетрудно рассчитать, что при $\alpha=0,8$ $\Delta h_{сл}=0,03$ мм, а при $\alpha=0,98$ $\Delta h_{сл}=0,06$ мм. Таким образом, увеличение надежности измерений влечет за собой рост ширины доверительного интервала (рис.4). ■

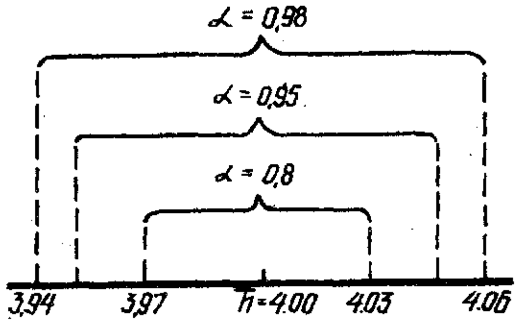



Рис.4.

***Пример 2.*** Используя результаты примера 1, определить доверительную вероятность того, что наилучшее значение $\bar{h}$ отличается от истинного значения $h_{ист}$ не более, чем на 0,02 мм.

Решение. Согласно условию, в этом случае $\Delta h_{сл}=$ $=0,02$ мм. Значение среднеквадратичной ошибки берем из примера 1: $S_{\bar{h}}=0,022$ мм. Тогда на основании формулы (18) имеем

$$t_{\alpha;\,n}=\frac{\Delta h_{сл}}{S_{\bar{h}}}=\frac{0,02}{0,022}=0,91.$$

Пользуясь таблицей 2, находим, что при $n=10$ и $t_{\alpha;\,n}=0,91$

доверительная вероятность $\alpha$=0,6. Следовательно, надежность утверждения, что $\bar{h}$=4,00 мм отличается от $h_{ист}$ не более чем на 0,02 мм, равна 60 %. ■

Таким образом, статистический метод обработки результатов измерений позволяет решить следующие задачи:

- при заданных числе измерений n и надежности $\alpha$ оценить случайную погрешность $\Delta X_{сл}$;

- при заданных числе измерений и погрешности $\Delta X_{сл}$ определить доверительную вероятность (надежность) $\alpha$ результата.

**2.3. Выявление промахов**

Наряду с отмеченными возможностями, статистический метод позволяет также обнаружить и устранить промахи. Основой для их выявления служит то обстоятельство, что при высокой надежности только ничтожно малая часть измеренных значений должна лежать за границами доверительного интервала. Так, в разделе 2.2 мы видели, что при надежности $\alpha$=0,997 вероятность получить при одном измерении результат, отличающийся от истинного значения более чем на 3$\sigma$, составляет 1-0,997=0,003. Появление такого результата как событие крайне маловероятное разумно объявить промахом и отбросить. Именно так и поступают в простейшем случае, заменяя в выражении 3$\sigma$ неизвестное значение стандартного отклонения $\sigma$ на среднеквадратичное отклонение одного измерения (17).

Однако заметим, что если мы выполним измерение еще раз, то вероятность появления большего отклонения возрастает и будет равна 1-(1-0,003) = 0,006, при выполнении n=10 измерений она станет равной 1-(1-0,003)=0,03, а при n=100 имеем 1-(1-0,03)=0,26. Приведенный расчет показывает, что вероятность появления больших отклонений, возникающих вследствие статистического разброса, растет при увеличении числа измерений. Поэтому при решении вопроса об отбрасывании подозрительных результатов целесообразно пользоваться специально вычисленными для данного числа опытов n и данной надежности $\alpha$ предельными значениями коэффициентов промаха $\nu_{max}$, приведенными в табл.4.

Практически для проверки в серии из n измерений результата $x_k$ k-го измерения, подозреваемого на промах при заданной надежности $\alpha$, вычисляют ***коэффициент промаха***

$$\nu = \frac{|\bar{x} - x_k|}{S_{\bar{x}}\sqrt{n-1}} \qquad (19)$$

и сравнивают его с соответствующим предельным значением $\nu_{max}$, взятым из табл.4. При $\nu > \nu_{max}$ результат k-го измерения $X_k$ объявляется промахом и должен быть отброшен, после чего вычисляются новые значения $\bar{X}$ и $S_{\bar{X}}$. В противном случае $X_k$ сохраняется.

***Табл.4. Предельные значения коэффициентов промаха***

| Число измерений n | Надежность α | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
| 3 | 1,41 | 1,41 | 1,41 | 1,41 |
| 4 | 1,65 | 1,69 | 1,71 | 1,72 |
| 5 | 1,79 | 1,87 | 1,92 | 1,96 |
| 6 | 1,89 | 2,00 | 2,07 | 2,13 |
| 7 | 1,97 | 2,09 | 2,18 | 2,27 |
| 8 | 2,04 | 2,17 | 2,27 | 2,37 |
| 9 | 2,10 | 2,24 | 2,35 | 2,46 |
| 10 | 2,15 | 2,29 | 2,41 | 2,54 |
| 15 | 2,33 | 2,49 | 2,64 | 2,80 |
| 20 | 2,45 | 2,62 | 2,78 | 2,96 |
| 25 | 2,54 | 2,72 | 2,88 | 3,07 |

***Пример 3.*** Проверить на промах результат девятого измерения толщины $h$ =4,12 мм в примере 1, наиболее отличающийся от наилучшего значения $\bar{h}$ =4,00 мм.

Р е ш е н и е . По формуле (19) вычислим коэффициент промаха для $h_9$

$$\nu = \frac{|\bar{h} - h_9|}{s_{\bar{h}}\sqrt{n-1}} = \frac{|4{,}00-4{,}12|}{0{,}022\cdot\sqrt{10-1}} = 1{,}82.$$

При $n=10$ и $\alpha=0{,}95$ из табл.4 находим $\nu_{max}=2{,}29$.

Поскольку $\nu > \nu_{max}$, то результат девятого измерения в выполненной серии промахом не является. ■

## 2.4. Оценка погрешностей средств измерений

Перейдем к обсуждению методов оценки второго слагаемого в выражении (11), обусловленного погрешностью средств измерений.

Обычно в лабораторном практикуме используются сравнительно простые средства измерений - меры и измерительные приборы. Примером мер могут служить разновесы, магазины сопротивлений или конденсаторов и др.

Измерительные приборы отличаются большим разнообразием и делятся на ***аналоговые*** и ***цифровые***. Если показания приборов являются непрерывной функцией измеряемой величины, то прибор называется ***аналоговым***. Приборы с дискретным отсчетом значений измеряемой величины относятся к ***цифровым***. Такие приборы имеют цифровое табло или цифровую шкалу и скачкообразно движущийся указатель.

Условно приборные погрешности средств измерений можно разделить на ***основные*** и ***дополнительные***. ***Дополнительные приборные погрешности*** вызваны неисправностью прибора (например, согнутая стрелка амперметра) или отклонением от правил и условий его эксплуатации. При точном соблюдении этих правил такие погрешности практически устраняются, а при необходимости их оценку удобно приводить в виде поправок.

***Основные приборные погрешности*** обусловлены допусками при изготовлении отдельных частей прибора, неравномерности нанесения штрихов шкалы, действием сил трения между его узлами и т.п. Эти погрешности обычно не подчиняются закону нормального распределения.

Основные приборные погрешности для всех средств измерений нормируются ГОСТами и гарантируются заводом-изготовителем и службой метрологической проверки. Как правило, они приводятся в технической документации, прилагаемой к средствам измерений (паспорт, техническое описание и т.д.), а также указываются на шкале прибора. В силу этого предварительное знакомство с паспортами средств измерений перед началом лабораторного исследования весьма полезно и необходимо.

Обобщенной характеристикой погрешности ряда измерительных приборов является класс точности.

***Класс точности прибора*** -это выраженное в % отношение предельной абсолютной погрешности прибора $\Delta X_{max}$ к максимальному значению измеряемой им величины $X_{max}$

(для многопредельных приборов на рабочем пределе)

$$k = \frac{\Delta X_{max}}{X_{max}} \cdot 100\% \quad . \tag{20}$$

Поясним сказанное примером. Пусть для измерения напряжения в электрической цепи используется вольтметр, который имеет шкалу делений от 0 до 20 В и позволяет измерить значение напряжения с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,2 В.

В этом случае $k = \frac{0{,}2}{20} \cdot 100\% = 1\%$ .

О таком приборе говорят, что его класс точности равен 1.

Класс точности указывается в паспорте или на шкале прибора.При этом знак % не ставится.На практике встречаются приборы с классами точности : 0,02 ; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4. Приборы, класс точности которых $k \leq 0{,}5$, применяются в точных лабораторных измерениях и называются ***прецизионными*** . Приборы с классом точности $k \geq 1$ принято относить к ***техническим*** . Приборы, для которых $k > 4$ ,относятся к внеклассным и классом точности не характеризуются.

Предельная абсолютная погрешность прибора $\Delta X_{max}$ и класс точности k определяются с надежностью $\alpha$ =0,997, которой отвечает полуширина доверительного интервала, равная $3\sigma$. Следовательно, при выполнении измерений с более низкой надежностью, что приводит к сужению доверительного интервала (рис.4), величина абсолютной приборной погрешности будет уменьшаться. Так, при $\alpha = 0{,}954$ полуширина доверительного интервала равняется $2\sigma$ и в качестве абсолютной приборной погрешности в этом случае с учетом формулы ( 20 ) следует взять

$$\Delta X_{пр} = \frac{2}{3} \cdot \Delta X_{max} = \frac{2}{3} \frac{k}{100\%} X_{max}$$

В общем случае при надежности $\alpha$ значение абсолютной приборной погрешности можно вычислить по формуле

$$\Delta X_{пр} = \frac{\lambda_\alpha}{3} \frac{k}{100\%} X_{max} \quad , \qquad (21)$$

в которой значение коэффициента $\lambda_\alpha$ берется из последней строки табл.2

Заметим, что $\Delta X_{пр}$ не зависит от измеренного значения $X_{изм}$ величины $X$ ,а определяется классом точности прибора и заданной надежностью результата.

Относительная приборная погрешность

$$\varepsilon_{пр} = \frac{\Delta X_{пр}}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{\lambda_\alpha}{3} k \frac{X_{max}}{\bar{X}} \qquad (22)$$

в отличие от абсолютной зависит от наилучшего значения $\bar{X}$ измеренной величины $X$ и, как видно из соотношения (22) , уменьшается при стремлении $\bar{X}$ к $X_{max}$ . Это обстоятельство должно быть учтено при выборе прибора (шкалы в многопредельных приборах) для предстоящего измерения. Выбирать прибор (шкалу) следует так, чтобы стрелка прибора при измерениях заходила за середину шкалы.

При оценке абсолютной приборной ошибки внеклассных приборов можно использовать следующие рекомендации:

- для аналоговых приборов абсолютная погрешность принимается равной половине цены наименьшего деления шкалы;

- для цифровых приборов $\Delta X_{пр}$ принимается равной цене деления шкалы или единице счета;

- для приборов, имеющих нониусную шкалу (штангенциркуль, микрометр и др.), за приборную ошибку принимается точность, определяемая нониусом. Например, при использовании металлической линейки*, цена деления которой 1 мм, $\Delta X_{пр}$ =0,5мм. При использовании цифрового электронного секундомера, позволяющего отсчитывать тысячные доли секунды, $\Delta X_{пр}$= 0,001С. Для микрометра $\Delta X_{пр}$=0,01мм.

В заключение скажем несколько слов о погрешностях механических секундомеров, широко применяемых в работах физпрактикума. Основная погрешность этих секундомеров

---

* Деревянными и пластиковыми линейками желательно не пользоваться, так как в результате атмосферных воздействий (набухание и др.) их погрешности могут оказаться весьма большими.

равна цене деления (0,1 или 0,2 с). Но погрешность отсчета зависит также от быстроты реакции на включение и остановку секундомера. Установлено, что при тщательных измерениях погрешности пуска и остановки дают погрешность порядка 0,3 с. Таким образом, при работе с секундомером (цена деления 0,2 с) предельная приборная погрешность равна $\Delta X_{пр}$ =0,5 с.

## 2.5. Порядок обработки результатов прямых измерений

Пусть в результате n измерений некоторой величины X получили значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ,отличающиеся друг от друга из-за наличия случайных ошибок. В этом случае обработка результатов измерений проводится по следующей схеме.

1. Результат каждого прямого измерения $X_i$ записывают в таблицу.

2. По формуле ( 15 ) вычисляют наилучшее значение величины X — среднее арифметическое значение $\bar{X}$ серии из n измерений.

3. Находят случайные отклонения $\Delta X_i = X_i - \bar{X}$ отдельных измерений.

4. Вычисляют квадраты отдельных отклонений $\Delta x_i^2$ и их сумму $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2$ .

5. Согласно формуле (16), определяют среднеквадратичную ошибку $S_{\bar{X}}$ серии из n измерений.

6. Задают надежность $\alpha$ результата измерений. Обычно в работах физпрактикума полагают $\alpha=0,95$.

7. Используя метод, изложенный в п.2.3, анализируют результаты измерений на присутствие промахов. При наличии промахов соответствующие результаты отдельных измерений отбрасывают и повторяют расчеты при новом значении n. Если грубые ошибки отсутствуют,то переходят к пункту 8.

8. Из табл.2 находят коэффициент Стьюдента $t_{\alpha;n}$ и по формуле (18) вычисляют случайную составляющую $\Delta X_{сл}$ погрешности измерений.

9. Определяют приборную ошибку $\Delta X_{пр}$ измерения величины X . Если известен класс точности прибора, то вычисляют по формуле (21). В противном случае следует использовать рекомендации,приведенные в п.2.4.

10. По формуле (11) находят полную абсолютную погрешность $\Delta X$ измерения величины X. Напомним, что когда одна из составляющих $\Delta X_{сл}$ или $\Delta X_{пр}$ по крайней мере в три раза меньше другой, то ею при вычислениях можно пренебречь (см.п.2.1).

11. Вычисляют относительную погрешность измерения

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{\overline{X}} \cdot 100\%$$

12. Записывают окончательный результат измерений в виде

$$X = \bar{X} \pm \Delta X\ ;\ \varepsilon = \ldots;\ \alpha = \ldots \qquad (23)$$

В случаях, когда контрольные измерения величины X не выявили случайных отклонений, вместо (23), сразу имеем

$$X = \bar{X} \pm \Delta X = X_{изм} \pm X_{пр};\ \varepsilon = \ldots\ ;\ \alpha = \ldots \qquad (24)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, отметим, что результаты вычислений по приведенной схеме удобно представить в виде табл.5. Смысл значений, заносимых в соответствующие клетки табл.5, ясен из приведенных обозначений.

***Табл.5. Схема записи обработки результатов измерений величины X***

| № п/п | $X_i$ | $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ | $\Delta x_i^2$ | $S_{\bar{X}}$ | $\Delta X_{сл}$ | $\Delta X_{пр}$ | $\bar{X} \pm \Delta X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | $\Delta X_1$ | $\Delta x_1^2$ | | | | |
| 2 | $X_2$ | $\Delta X_2$ | $\Delta x_2^2$ | | | | |
| • | • | • | • | | | | |
| i | $X_i$ | $\Delta X_i$ | $\Delta x_i^2$ | ... | ... | ... | ... |
| • | • | • | • | | | | |
| n | $X_n$ | $\Delta X_n$ | $\Delta x_n^2$ | | | | |
| $n=$ | $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta X_i$ | $\sum_{i=1}^{n}\Delta X_i = 0$ | $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2 =$ | $t_{\alpha;n}$ | $\Delta X = \sqrt{\Delta X_{сл}^2 + \Delta X_{пр}^2}$ | | $\varepsilon = \frac{\Delta X}{\bar{X}} \cdot 100\%$ |

***Пример 4.*** Для измерения силы тока в катушке был использован миллиамперметр , позволяющий измерять значения силы тока от 0 до 25 мА, и от 0 до 50 мА , класс точности которого равен 1. Контрольные измерения показали , что имеет место статистический разброс измеренных значений , поэтому измерения были повторены восемь раз (результаты измерений приведены во втором столбике таблицы 6). Выполнить обработку результатов по приведенной схеме .

Р е ш е н и е. 1. Результаты каждого прямого измерения заносим во второй столбец табл.6

2. Вычислим среднее арифметическое

$$\bar{I} = \frac{18{,}3+18{,}1+18{,}2+18{,}6+18{,}4+18{,}2+18{,}0+18{,}1}{8} = 18{,}24\text{мА} \quad ,$$

сохранив при округлении результата одну запасную цифру.

3. По формуле $\Delta I_i = I_i - \bar{I}$ вычислим случайные отклонения отдельных измерений (см. табл.6).

4. Вычислим квадраты отдельных отклонений $\Delta I_i^2$ и их сумму $\sum_{i=1}^{8} \Delta I_i^2$ . Результаты вычислений занесем в четвертый столбец табл.6.

5. По формуле ( 16 ) рассчитаем среднеквадратичную ошибку выполненной серии измерений

$$S_{\bar{I}} = \sqrt{\frac{2588 \cdot 10^{-4}}{8(8-1)}} = 0{,}068\text{мА}$$

*Табл.6. Обработка результатов измерений силы тока*

| № п/п | $I_i$ мА | $\Delta I_i$ мА | $\Delta I_i^2 \cdot 10^{-4}$ мА | $S_{\bar{I}}$ мА | $\Delta I_{сл}$ мА | $\Delta I_{пр}$ мА | $\bar{I} \pm \Delta I$ мА |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18.3 | +0.06 | 36 | 0,068 | 0,16 | 0,17 | 18,2± 0,2 |
| 2 | 18.1 | -0.14 | 196 | | | | |
| 3 | 18.2 | -0.04 | 16 | | | | |
| 4 | 18.6 | +0.36 | 1296 | | | | |
| 5 | 18.4 | +0.16 | 256 | | | | |
| 6 | 18.2 | -0.04 | 16 | | | | |
| 7 | 18.0 | -0.24 | 576 | | | | |
| 8 | 18.1 | -0.14 | 196 | | | | |
| n=8 | $\bar{I}$ =18,24 | $\sum_{i=1}^{8}\Delta I_i = 0,0$ | $\sum_{i=1}^{8}\Delta I_i^2 = 0,2588$ | $t_{0,95;8}=2,4$ | $\Delta I$ =0,23 | | $\varepsilon_I=1,3\%$ |

6. Определим ширину доверительного интервала с надежностью $\alpha$ =0,95.

7. Проверим результаты измерений на наличие промахов.Подозрительным является значение $I_4$=18,6мА. Поэтому вычислим для него по формуле (19) соответствующий коэффициент промаха

$$\nu = \frac{|\bar{I} - I_4|}{S_{\bar{I}}\sqrt{n-1}} = \frac{0,36}{0,068\sqrt{8-1}} = 2,0$$

Значение предельного коэффициента промаха $\nu_{max}$ при $\alpha$=0.95 и n =8 берем из табл.4: $\nu_{max}$ =2.17. Поскольку $\nu > \nu_{max}$, то результат четвертого измерения промахом не является, и его следует сохранить.

8. Из табл.2 находим, что при надежности $\alpha$=0,95 и числе измерений $n$ =8 коэффициент Стьюдента $t_{0,95;8}$ =2,4. теперь по формуле (18) можем вычислить случайную составляющую погрешности измерений

$$\Delta I_{сл} = t_{0,95;8} S_{\bar{I}} = 2{,}4 \cdot 0{,}068 = 0{,}16 \text{ мА}$$

9. По формуле (21) оценим приборную погрешность измерения $\Delta I_{пр}$. Считая, что при измерениях использовалась первая шкала милиамперметра, имеем $I_{max}$ =25мА, $k$=1%, $\lambda$=2. В этом случае

$$\Delta I_{пр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\%}{100\%} 25 = 0{,}17 \text{мА}$$

При использовании второй шкалы ( 0 ÷50 мА ) приборная погрешность

$$\Delta I_{пр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\%}{100\%} 50 = 0{,}34 \text{мА}$$

возрастает. Следовательно, использование этой шкалы нецелесообразно, так как приводит к понижению точности результата.

10. По формуле ( 11 ) вычислим полную абсолютную погрешность измерения

$$\Delta I = \sqrt{\Delta I^2 + \Delta I^2} = \sqrt{0{,}16^2 + 0{,}17^2} = 0{,}23 \text{мА}$$

11. Определим относительную погрешность измерения

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = \frac{0,23}{18,24} \cdot 100\% = 1,3\% \quad .$$

12. Учитывая правила округления погрешностей (см.п.4.3), запишем окончательный результат

$I = (18,2 \pm 0,2)$ мА; $\varepsilon = 1,3\%$; $\alpha = 0,95$.

В заключение заметим, что вся информация о выполненных вычислениях и их результаты содержатся в табл.6.

# 3. Оценка погрешностей косвенных измерений

## 3.1. Постановка задачи

В работах физпрактикума приходится выполнять не только прямые, но и косвенные измерения. При косвенных измерениях интересующая нас физическая величина Y определяется как некоторая функция других величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$, найденных путем прямых измерений,

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \tag{25}$$

Будем считать, что необходимые прямые измерения выполнены с одинаковой надежностью $\alpha$ и их результаты $x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1, x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2, \ldots, x_N = \bar{x}_N \pm \Delta x_N$ известны.

Тогда за наилучшее значение величины Y принимается [2]

$$\bar{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) \ , \tag{26}$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N$ —средние арифметические значения результатов прямых измерений.

Погрешность косвенного измерения величины Y зависит от погрешностей всех прямоизмеренных величин, входящих в уравнение связи (25),а также от погрешности вычислений. Общие правила вычисления погрешности могут быть легко выведены с помощью дифференциального исчисления. Однако полученные при этом соотношения в силу произвольного вида функциональной зависимости (25), являются сравнительно громоздкими и оказываются не всегда удобными при их практическом использовании в учебной лаборатории. В связи с этим целесообразно вначале обсудить ряд правил, связанных с простейшими частными задачами, а потом рассмотреть общие соотношения и привести схему расчета.

## 3.2. Простейшие правила расчета погрешностей косвенных измерений

***Абсолютная погрешность суммы*** измеренных величин равна сумме абсолютных погрешностей отдельных слагаемых.

***Пример 5.*** Пусть в результате измерений масс двух грузов были получены значения $m_1=(2,8 \pm 0,1)$ г и $m_2=(3,6 \pm 0,2)$г. Определить наилучшее значение их общей массы $m = m_1 + m_2$ и его погрешность.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (26 ), наилучшее значение суммарной массы грузов $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = 6,4$ г.

Абсолютная погрешность $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 0,3$ г. Следовательно, общая масса грузов $m = (6,4 \pm 0,3)$ г. ■

***Абсолютная погрешность разности*** двух измеренных величин равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

При вычислении погрешностей произведения и частного правила, аналогичные сформулированным выше, справедливы для относительных погрешностей.

***Относительная погрешность произведения*** измеренных величин равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

***Относительная погрешность частного*** двух измеренных величин равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

***Пример 6.*** Для определения электрического сопротивления катушки были измерены значения напряжения $U = (240 \pm 15)$ мВ и силы тока $I = (18,2 \pm 0,2)$ мА. Найти наилучшее значение $R$, измеренного сопротивления и его погрешность $\Delta R$.

Р е ш е н и е. Имеем $\overline{R} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{I}} = \dfrac{240 \cdot 10^{-3}}{18,2 \cdot 10^{-3}} = 13,2$ Ом

Определим погрешность результата измерения. Относительная погрешность измерения напряжения. $\varepsilon_U = 6,3\%$; силы тока - $\varepsilon_I = 1,3\%$; следовательно, $\varepsilon_R = \varepsilon_U + \varepsilon_I = 6,3\% + 1,3\% = 7,6\%$. Тогда абсолютная погрешность измерения сопротивления

$$\Delta R = \frac{\varepsilon_R \overline{R}}{100\%} = \frac{7,6 \cdot 13,2}{100} = 1,0 \text{ Ом}$$

Таким образом, результат измерения $R = (13,2 + 1,0)$ Ом. ■

*Замечание*. В тех случаях, когда прямоизмеренные величины независимы и измеряются независимыми методами сформулированные правила должны быть уточнены. А именно, вместо обычного сложенияния погрешностей, следует пользоваться квадратичным сложением. Так, для погрешности разности двух прямых измерений $Y=X_1-X_2$ будем иметь

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta X_1^2+\Delta X_2^2}.$$

Возможность и последствия такой замены обсуждались в п.2.1. при вычислении полной погрешности прямых измерений. Проиллюстрируем их еще раз, используя данные и результаты примера 6.

***Пример 7.*** Рассчитать значение R из примера 6 с помощью квадратичного сложения.

Решение. По формуле квадратичного сложения для относительной погрешности измерения сопротивления R будем иметь

$$\varepsilon_R = \sqrt{\varepsilon_U^2+\varepsilon_I^2} = \sqrt{6{,}3^2+1{,}3^2} = 6{,}4\%$$

Учитывая, что $\varepsilon_I < 1/3\varepsilon_U$, можем сразу записать $\varepsilon_R \approx \varepsilon_U = 6{,}3\%$, что практически не отличается от $\varepsilon_R = 6{,}4\%$. Тогда R = (13,2 + 0,8) Ом.■

Рассмотренный пример еще раз показывает, что использование квадратичного сложения погрешностей, вместо обычного, приводит к сужению доверительного интервала и, следовательно, к повышению точности результата. Поэтому везде, где это возможно, следует пользоваться правилом квадратичного сложения.

Приведем еще два правила, которые полезно запомнить и использовать при оценках погрешностей и планировании эксперимента.

При умножении измеренного значения величины на точное число абсолютная погрешность результата равна произведению абсолютной погрешности измеренного значения на это число, а относительная погрешность остается неизменной.

При возведении в степень n измеренного значения величины относительная погрешность результата возрастает в n раз.

Примеры применения этих правил будут даны в п.3.2.

### 3.3. Метод “шаг за шагом”

Сформулированные выше элементарные правила обладают тем преимуществом, что при минимальном объеме вычислений позволяют справиться с более сложными задачами расчета погрешностей косвенных измерений. Для этого достаточно обратить внимание на то, что во многих случаях расчет косвенной величины по формуле (25) может быть представлен как последовательность определенных шагов, каждый из которых включает только одну из следующих операций: сложение, вычитание, умножение или деление, возведение в степень, умножение измеренного значения на точное число. Метод расчета, базирующийся на таком подходе и получивший название “шаг за шагом”, оказывается весьма удобным и экономичным.

Проиллюстрируем его применение конкретными примерами.

***Пример 8.*** Для определения момента инерции диска по формуле $I=1/8\ mD^2$ были измерены масса диска $m=(223 \pm 5)$ г и его диаметр $D=(74 \pm 2)$ мм. При этом наилучшее значение момента инерции

$$\bar{I} = \frac{1}{8} \cdot \bar{m}\bar{D}^2 = \frac{223 \cdot 10^{-3}(74 \cdot 10^{-3})^2}{8} = 1{,}53 \cdot 10^{-4}\ \text{кг·м}^2$$

Найти погрешность результата измерения, следуя методу "шаг за шагом".

Р е ш е н и е. Вначале определим относительную погрешность множителя $D^2$

$$\varepsilon_{D^2} = 2\varepsilon_D \quad ,$$

затем относительную погрешность произведения $mD^2$,

$$\varepsilon_{mD^2} = \varepsilon_m + \varepsilon_{D^2}$$

которая в силу того, что множитель 1/8 является точным числом, будет совпадать с относительной погрешностью результата

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{mD^2} = \varepsilon_m + \varepsilon_{D^2} = \varepsilon_m + 2\varepsilon_D \quad . \qquad (27)$$

Принимая во внимание независимый характер измерений массы диска и его диаметра, заменяем обычное сложение в формуле (27) квадратичным. Тогда

$$\varepsilon_I = \sqrt{\varepsilon_m^2 + (2\varepsilon_D)^2} \quad . \qquad (28)$$

Учитывая, что $\varepsilon_m$=2,2 % и $\varepsilon_D$=2,7% по формуле (28) находим

$$\varepsilon_I = \sqrt{2{,}2^2 + (2\cdot 2{,}7)^2} = 5{,}8\%$$

Соответствующая абсолютная погрешность измерения момента инерции

$$\Delta I = \frac{\bar{I}\varepsilon_I}{100\%} = \frac{1{,}53\cdot 10^{-4}\cdot 5{,}8}{100} = 0{,}09\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$$

При округлении относительных погрешностей $\varepsilon_m$ и $\varepsilon_D$ до одной значащей цифры имеем

$$\varepsilon_I = \sqrt{2^2 + (2\cdot 3)^2} = 6\%\ ,$$

и для абсолютной погрешности момента инерции получаем тот же результат

$$\Delta I = 0{,}09\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}\ .$$

Заметим, что во втором случае вычисление погрешностей косвенного измерения можно выполнить практически устно. Последнее обстоятельство подчеркивает значимость и эффективность использования общепринятых правил округления погрешностей. ■

Не вдаваясь в детали численных расчетов, приведем еще один пример применения метода "шаг за шагом", отличающийся от предыдущего наличием операции сложения.

***Пример 9.*** Для определения коэффициента поверхностного натяжения σ методом отрыва кольца используется формула

$$\sigma = \frac{F}{\pi(D_1+D_2)}\ ,$$

где $F$ — упругая сила, возникающая в растянутой пружине, $D_1$ и $D_2$ — внешний и внутренний диаметры кольца. Найти относительную погрешность $\varepsilon_\sigma$.

Р е ш е н и е. В соответствии с изложенными правилами и идеей метода "шаг за шагом" для относительной погрешности результата измерения получаем

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_F + \varepsilon_\pi + \varepsilon_{D_1+D_2} = \varepsilon_F + \varepsilon_\pi + \frac{\Delta\left(D_1+D_2\right)}{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}\cdot 100\% =$$

$$= \varepsilon_F + \varepsilon_\pi + \frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}\cdot 100\%$$

Здесь $\varepsilon_\pi$-относительная погрешность округления числа $\pi$. ■

## 3.4. Общие формулы для оценки погрешностей косвенных измерений

При расчетах косвенных величин приходится пользоваться не только выражениями,содержащими операции сложения, умножения и другие, рассмотренные выше. Многие формулы включают в себя тригонометрические функции, логарифмы и т.д. В связи с этим надо знать общие правила вычисления погрешностей величины $y$ ,пригодные для произвольной функциональной зависимости (25). При этом возможны два основных случая:

—интересующая нас величина $y$ зависит от одной измеренной величины $x$ ;

—величина $y$ зависит от нескольких измеренных величин $x_1, x_2, ..., x_N$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $y=f(x)$,

где $x = \bar{x} \pm \Delta x$ - величина, полученная путем прямого измерения.

Тогда наилучшее значение косвенной величины $y$, согласно (26), равно $\bar{y}=f(\bar{x})$. Соответствующие границы доверительного интервала $[\bar{y} - \Delta y; \bar{y} + \Delta y]$ можно определить из очевидных равенств $\bar{y} \pm \Delta y = f(\bar{x} \pm \Delta x)$, смысл которых иллюстрирует рис.5. Отсюда для отклонений $\pm \Delta y$ получаем

$$\pm \Delta y = f(\bar{x} \pm \Delta x) - f(\bar{x}). \qquad (29)$$

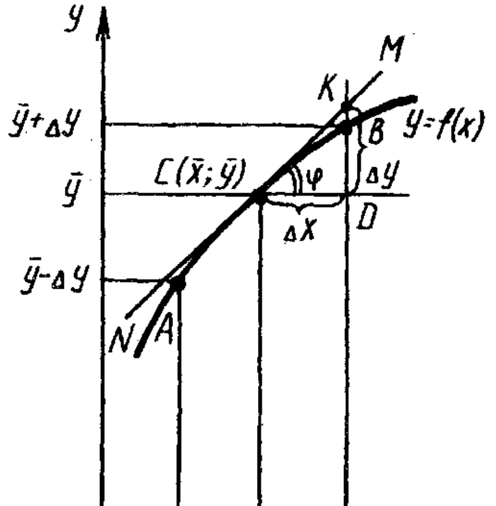



Рис. 5

Формуле (29) удобно придать иной вид. При малых отклонениях дуга AB может быть с хорошим приближением заменена отрезком касательной NM, проведенной в точке $C(\bar{X};\ \bar{Y})$ к графику функции $Y=f(X)$. Тогда, учитывая, что $\Delta y = DB \approx DK = dy$, из треугольника KCD имеем, $\Delta y \approx dy = \Delta x\, \mathrm{tg}\varphi$, где $\varphi$—угол между касательной NM и положительным направлением оси OX. Согласно геометрическому смыслу первой производной,

$\mathrm{tg}\varphi = dy/dx\big|_{\bar{X}}$. Такая запись означает, что значение производной должно быть вычислено при $x = \bar{x}$. Теперь для абсолютной погрешности косвенной величины y можем записать

$$\Delta y = dy/dx\big|_{\bar{X}}\ \Delta x. \qquad (30)$$

Значение производной в выражении (30) следует брать по абсолютной величине.

Формула (30) является основной для расчета абсолютной погрешности косвенной величины y, зависящей от одной измеренной величины x. Ее использование в конкретных вычислениях позволяет, в частности, существенно расширить возможности метода "шаг за шагом".

Для удобства читателя рассмотрим пример применения формулы (30). При малых $\Delta X$ формулу (30) можно рассматривать как точное, а не приближенное равенство.

***Пример 10.*** При измерении коэффициента трения методом наклонной плоскости используется формула $\mu = \mathrm{tg}\beta$ ,где $\beta$ — угол наклона плоскости к горизонту, соответствующий началу движения помещенного на нее образца. Найти измеренное значение $\mu$, если $\beta = 10° \pm 2°$.

Р е ш е н и е. По формуле (30) для абсолютной погрешности косвенного измерения коэффициента трения $\mu$ получаем $\Delta\mu = \cos^{-2}\beta\ \Delta\beta$ . Следовательно,

$\mu = \mathrm{tg}10° = 0{,}1763$ и $\Delta\mu = 2°/\cos^2 10° = 0{,}035$ рад$/0{,}9698 = 0{,}036$.

Округлив значение погрешности до одной значащей цифры, окончательно имеем $\mu = 0{,}18 \pm 0{,}04$.

Надежность полученного результата совпадает с надежностью измерения угла $\beta$ .■

Рассмотрим второй случай, когда величина $y$ является функцией нескольких величин $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, найденных путем прямых измерений, выполненных с одинаковой надежностью. Здесь полная погрешность величины $y$ будет обусловлена погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$ отдельных прямоизмеренных величин и видом функциональной зависимости. Для составляющей $\Delta y_k$ полной погрешности $\Delta y$, порождаемой погрешностью $\Delta x_k$ k-ой прямоизмеренной величины $x_k$ , по аналогии с формулой (30) можем записать (при малых $\Delta x_k$ )

$$\Delta y_k = \partial f/\partial x_k \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N} \Delta x_k \,. \qquad (31)$$

Обозначение $\partial f/\partial x_k$ имеет обычный смысл частной производной функции $f$ по аргументу $x_k$, при вычислении которой все аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_N$, кроме $x_k$, считаются постоянными.

Тогда для нахождения полной погрешности величины $y$, т.е. для учета вкладов от погрешностей каждого прямого измерения, от которого она зависит, достаточно просто сложить выражения вида (31). Получим

$$\Delta y = \partial f/\partial x_1 \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N} \Delta x_1 + \ldots + \partial f/\partial x_N \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N} \Delta x_N =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \partial f/\partial x_k \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N} \Delta x_k \,. \qquad (32)$$

В тех случаях, когда аргументы функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ являются независимыми величинами, обычное сложение в формуле (32) следует заменить квадратичным. В результате имеем*

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N} \Delta x_k^2} \qquad (33)$$

---

* Приведенные выше рассуждения не являются строгим выводом формул (32) и (33), а позволяют только пояснить идеи появления этих соотношений.

Формулы (32) и (33) являются наиболее общими соотношениями, используемыми для расчетов погрешностей косвенных измерений.

Рассмотрим с их помощью несколько частных случаев.

1. Пусть $y = x_1 - x_2$ -разность измеренных величин. Тогда, согласно формуле (32), находим

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2.$$

Полученное выражение отражает содержание уже известного нам правила об абсолютной погрешности разности двух измеренных величин.

При использовании, вместо выражения (32), формулы (33) получим

$$\Delta y = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$

Этот результат находится в соответствии с содержанием замечания, сделанного в п.3.1.

2. Пусть $y = x_1/x_2$ . По формуле (32) имеем

$$\Delta y = \frac{1}{\bar{x}_2}\Delta x_1 + \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2}\Delta x_2 \qquad (34)$$

Преобразуем полученный результат

$$\Delta y = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\cdot\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2}\cdot\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\left(\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right) = \bar{y}(\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})$$

Отсюда для относительной погрешности величины получаем

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} \quad , \qquad (35)$$

что совпадает с правилом вычисления относительной погрешности частного двух измеренных величин.

Отметим, что даже в таком простом случае вычисление погрешности величины $y$ по формуле (35) значительно менее трудоемко, чем по формуле (34). Именно в этом заключается преимущество использования правил, сформулированных в п.3.1. Оставшиеся из этих правил читатель, опираясь на соотношения (32) и (33), может легко доказать самостоятельно.

### 3.5. Порядок выполнения и обработки результатов косвенных измерений

При выполнении косвенных измерений и обработке их результатов удобно придерживаться следующей схемы.

1. Выяснить, от каких величин $x_1, x_2, ..., x_N$, подлежащих прямым измерениям, зависит косвенно измеряемая величина $y$.

2. Установить, какие из величин $x_1, x_2, ..., x_N$ являются независимыми, а какие — нет.

3. Используя метод "шаг за шагом" или формулы (32) и (33), получить расчетную формулу для вычисления погрешностей величины $y$.

4. Проанализировать результаты пункта 3 и выяснить, прямые измерения каких величин дают наибольший вклад в погрешность величины $y$. В дальнейшем эти измерения должны быть выполнены особенно тщательно.

5. Выполнить прямые измерения величин $x_1, x_2, ..., x_N$, от которых зависит величина $y$, и обработать их результаты

в соответствии с правилами, изложенными в п.2.5. При этом для всех величин $x_1, x_2, ..., x_N$ следует задавать одно и то же значение доверительной вероятности $\alpha$ .

6. По формуле (26) вычислить наилучшее значение величины $y$ .

7. Пользуясь результатами пункта 3, вычислить абсолютную и относительную погрешности измерения величины $y$ .

8. Учитывая правила округления погрешностей, записать окончательный результат в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y,\ \varepsilon = ...,\ \alpha = ... . \qquad (36)$$

Смысл полученного результата такой же, как и в случае с прямыми измерениями.

***Пример 11.*** В эксперименте по определению коэффициента жесткости пружины путем измерения времени N полных колебаний пружинного маятника значение коэффициента жесткости можно рассчитать по формуле

$$k = \frac{4\pi^2 N^2 m}{t^2}\ , \qquad (37)$$

где $m$ - масса колеблющегося груза, $t$ - время $N$ полных колебаний. Определить абсолютную $\Delta k$ и относительную погрешности результатов измерений.

Р е ш е н и е. 1. Из вида расчетной формулы (37) устанавливаем, что значение коэффициента $k$ зависит от результатов измерения массы груза $m$ и времени $t$ . Кроме того, число , являясь иррациональным, при вычислениях потребует округления, что также повлечет за собой некоторую погрешность в определении коэффициента жесткости. Таким образом, $k = f(\pi, m, t)$.

2. В процессе эксперимента значения $\pi$, $m$, и $t$ определяются независимыми методами. Следовательно, эти величины являются независимыми, и при вычислении полной погрешности измерения $\Delta k$ необходимо пользоваться квадратичным сложением.

3. Применяя метод "шаг за шагом" для вычисления относительной погрешности коэффициента жесткости $k$, получаем формулу

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{\pi^2} + \varepsilon_m + \varepsilon_{t^2} = 2\varepsilon_\pi + \varepsilon_m + 2\varepsilon_t.$$

Заменив здесь обычное сложение квадратичным, окончательно имеем*

$$\varepsilon_k = \sqrt{(2\varepsilon_\pi)^2 + \varepsilon_m^2 + (2\varepsilon_t)^2} \qquad (38)$$

4. Из формулы (38) видно, что наибольший вклад в погрешность измерения жесткости $k$ следует ожидать от измерения времени $N$ полных колебаний. Поэтому при выполнении эксперимента эту величину необходимо измерить как можно точнее.

Выясним, насколько тщательно должны быть выполнены измерения массы груза, если для измерения времени

---

*Читателю полезно убедиться, что расчет по формуле (33) приводит к аналогичному выражению для относительной погрешности $\varepsilon_k$

мы располагаем механическим секундомером с ценой деления 0,2 с. Пусть контрольные измерения времени 10 полных колебаний дали результат $t=5,8$ с. Тогда, вспоминая, что приборная погрешность секундомера с учетом времени его пуска и остановки равна $\Delta t_{пр} = 0,5$ с, получаем

$$\varepsilon_t = 0,5/5,8 \cdot 100\% = 9\% \text{ или } 2\varepsilon_t = 18\%.$$

Учет случайной составляющей $\Delta t_{сл}$ ошибки измерения времени $t$ может только увеличить этот результат. Поэтому даже в том случае, если измерения массы груза выполнить с относительной ошибкой $\varepsilon_m = 6\ \%$, вклад этой ошибки в полную погрешность $\varepsilon_k$ можно считать пренебрежительно малым. Например, результат измерения массы $m = (150 \pm 5)$ г, что соответствует относительной погрешности $\varepsilon_m < 4\ \%$, является очень хорошим для нашего эксперимента. Попытки получить более точное значение массы будут просто напрасной тратой времени.

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно установить, что при замене числа $\pi$ приближенным значением 3,1, погрешность, обусловленная первым слагаемым в (38), также пренебрежимо мала. Однако, положив $\pi$ равным 3, мы допустим ошибку, соизмеримую с ошибкой, имевшей место при измерении времени.

5. Примеры обработки результатов прямых измерений были приведены в разделе 2. Поэтому для краткости будем считать, что результаты прямых измерений массы и времени при $N = 10$ известны:

$m = (150 \pm 5)$ г, $\varepsilon_m = 3{,}3\%$, $\alpha = 0{,}95$;

$t = (5{,}9 \pm 0{,}7)$ с; $\varepsilon_t = 12\%$, $\alpha = 0{,}95$.

6. Положив $\bar{m} = 150$ г, $t = 5{,}9$ с и $\pi = 3{,}1$, по формуле (37) находим наилучшее значение коэффициента жесткости

$$\bar{k} = (4 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^2 \cdot 150 \cdot 10^{-3}) / 5{,}9^2 = 16{,}6 \text{ Н/м}.$$

7. Пренебрегая первым и вторым слагаемым в подкоренном выражении формулы (38), для относительной ошибки измерения $k$ имеем $\varepsilon_k = 2\,\varepsilon_t = 24\%$. Величина абсолютной погрешности

$$\Delta k = \varepsilon_k \bar{k} / 100\% = 24 \cdot 16{,}6 / 100 = 4{,}0 \text{ Н/м}.$$

8. Запишем окончательный результат

$k = (17 \pm 4)$ Н/м, $\varepsilon = 24\%$, $\alpha = 0{,}95$. ■

Рассмотренный пример не означает, что приведенные здесь рассуждения должны быть изложены в полном объеме в отчете о проделанной работе. Однако для исследователя, стремящегося выполнить измерения сознательно, такой анализ в процессе подготовки к работе необходим.

# 4. Элементы теории приближенных вычислений

## 4.1. Основные определения. Вычисления с приближенными числами

В процессе измерений экспериментатор сталкивается с необходимостью выполнить разнообразные вычисления. Полученный при этом результат неизбежно отягощен ошибкой измерения, т.е. имеет приближенный характер. Как бы тщательно ни выполнялись вычисления, устранить с их помощью погрешность измерений невозможно. Поэтому стремление сделать вычисления более точными, чем те, которые необходимы для данного эксперимента, является напрасной тратой времени, не приводящей к изменению точности результата. Правила рациональных вычислений, учитывающие это обстоятельство, можно сформулировать, опираясь на понятие приближенного числа.

К ***приближенным числам*** относятся : результаты измерения различных величин, округленные значения точных и иррациональных чисел, табличные значения различных величин и др.

Приближенные числа, полученные при различных математических операциях или взятые из таблиц, могут иметь различное количество цифр. Все цифры приближенного числа принято делить на верные, сомнительные, неверные цифры.

***Верными цифрами*** приближенного числа считают n первых цифр, если абсолютная погрешность числа не превышает половины единицы разряда n - й цифры. Таким образом, количество верных цифр однозначно определяется величиной абсолютной погрешности приближенного числа.

Цифра, стоящая за последней верной, называется ***сомнительной.*** Иногда сомнительных цифр может быть две. Как правило, разряд сомнительной цифры числа совпадает с разрядом первой значащей цифры абсолютной погрешности.

Все цифры, расположенные после сомнительной, являются ***неверными***. Неверные цифры, не несущие реальной информации, должны быть отброшены как в исходных данных, так и в окончательном результате расчета. При отбрасывании неверных цифр следует пользоваться общепринятыми ***правилами округления***: если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из оставляемых цифр не изменяется; если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то к последней оставляемой цифре прибавляется единица.

Например в числе 52,741 ± 0,2 две первые цифры верные, третья - сомнительная, а две последние - неверные. Правильная запись этого числа имеет вид 52,7 ± 0,2. У приближенного числа 52,741 ± 0,8 верная цифра только одна, однако и его следует писать в виде 52,7 ± 0,8. Здесь цифры 2 и 7 являются сомнительными.

Для удобства выполнения математических действий над приближенными числами, кроме разделения их цифр на верные, сомнительные и неверные, принято различать цифры значащие и незначащие.

***Значащими цифрами*** приближенного числа являются все верные цифры и одна сомнительная, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, у чисел 5,31; 0,06082 и $1{,}6\ 7\cdot 10^2$ соответственно три, четыре и две значащие цифры.

Нули, стоящие позади значащих цифр, могут быть значащими и незначащими. В тех случаях, когда нули означают, что последние разряды пустые, но верные (один сомнительный), их необходимо считать значащими и сохранять при записях. Например, у приближенного числа 3,60 - три значащие цифры, а сама запись означает, что истинное значение этого числа заключено в интервале [3,595; 3,604]. Отбросив нуль, то есть записав это число в виде 3.6, мы расширяем интервал его возможных значений до [3.55; 3.64], теряя при этом точность результата. Так, в первом случае, относительная погрешность составляет 0.14%, а во втором случае уже 1.4%.

Если нули, стоящие позади значащих цифр, получились в результате округления больших чисел, то они незначащие. Например, скорость света в вакууме, по данным опытов, равна 299792,5 км/с. Это число обычно округляется до 300 000 км/с. В этом случае у числа только одна значащая цифра. Чтобы избавиться от таких "лишних" нулей, приближенные числа удобно представлять в ***нормальной форме***. Для этого в числе ставят запятую после первой отличной от нуля цифры, а все число умножается на $10^k$, где k - целое (положительное или отрицательное) число. Нули, стоящие в начале числа, в этом случае оказываются ненужными, а незначащие нули в конце числа отбрасываются. Так, округленное значение скорости света в вакууме следует записать в виде $c = 3 \cdot 10^5$ км/с. Для чисел 524 и 0.003706 соответственно имеем $5{,}24 \cdot 10^2$ 0 и $3{,}706 \cdot 10^{-3}$.

Выполнение математических операций над приближенными числами дает результаты, также являющиеся приближенными числами. Чтобы определить значащие цифры результата, необходимо найти его абсолютную погрешность. Однако такой прием весьма не удобен, если результат является промежуточным. Поэтому для определения общего количества верных и сомнительных цифр в результатах пользуются следующими правилами приближенного подсчета значащих цифр..

***1. Сложение и вычитание.*** Разряд сомнительной цифры алгебраической суммы совпадает со старшим из разрядов сомнительных цифр всех слагаемых. Следовательно, при выполнении сложения надо определить, в каких разрядах стоят сомнительные цифры у каждого слагаемого, и найти, какой из этих разрядов самый старший. Сомнительная цифра суммы будет стоять в этом же разряде. Вычитание рассматривается как частный случай сложения. Например:

$$32.7 + 0.531 - 7.6584 \approx 32.7 + 0.53 - 7.66 = 25.57 \approx 25.6.$$

***2. Умножение и деление.*** Результат умножения или деления содержит столько значащих цифр, сколько их имеет исходное приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр, например:

$23{,}621 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-2} : 5{,}72 \approx 24 \cdot 0{,}093 : 5.7 = 0{,}3015789 \approx 0.39.$

***3. Возведение в степень***. При возведении в степень результат содержит столько значащих цифр, сколько их у основания степени, в частности

$$0{,}73^2 = 0{,}5329 \approx 0{,}53.$$

***4. Извлечение корня.*** При извлечении корня любой степени из приближенного числа в результате следует сохранять столько значащих цифр,сколько их в подкоренном выражении. Например:

$$\sqrt[3]{2{,}87} = 1{,}4211087 \approx 1{,}42.$$

***5. Логарифмирование.*** При любой характеристике мантисса логарифма приближенного числа имеет то же количество значащих цифр, что и само это число. Верно и обратное: находимое по логарифму число должно иметь столько значащих цифр, сколько их содержит мантисса. Например $\ln 12{,}33 = 2{,}5120353 = 2{,}5120353 \approx 2{,}5120$. При потенцировании, если $\lg a = 0.72$, то $a = 5{,}2480746 \approx 5.2$.

***6. Нахождение угла по заданной тригонометрической функции.*** Если значение функции имеет не менее двух значащих цифр, то значение угла записывается с точностью до градуса. Пусть $\sin\varphi = 0{,}26$. Тогда $\varphi = 15 \pm 1^0$.

***7. Правило запасной цифры.*** В промежуточных результатах, т.е. в тех приближенных числах, которые используются в последующих расчетах, следует сохранить по одной лишней (запасной) цифре сверх требований правил ***1. - 5.*** Цель сохранения запасной цифры - уменьшить в дальнейших вычислениях погрешность ошибок округления. В окончательном результате запасная цифра обычно отбрасывается.

Приведенные выше правила приближенных вычислений следует применять и в тех случаях, когда для расчетов используются микрокалькуляторы или другая электронно-вычислительная техника.

При отсутствии микрокалькуляторов большую помощь при расчетах могут оказать формулы для приближенных вычислений, позволяющие во многих случаях существенно упростить расчеты. Некоторые из таких формул приведены в табл. 7.

***Табл. 7. Формулы приближенных вычислений.***

| Формула | Применяется при а, не большем следующего значения, с точностью | | |
|---|---|---|---|
| | 5% | 1% | 0.1% |
| $\frac{1}{(1+a)} = 1 - a$ | 0.22 | 0.10 | 0.032 |
| $\sqrt{1+a} = 1 + \frac{1}{2}a$ | 0.63 | 0.28 | 0.090 |
| $\frac{1}{\sqrt{1+a}} = 1 - \frac{1}{2}a$ | 0.36 | 0.16 | 0.052 |
| $e^a = 1+a$ | 0.31 | 0.14 | 0.045 |
| $\ln(1+a) = a$ | 0.10 | 0.02 | 0.002 |
| $\sin a = a$ | 0.55 | 0.24 | 0.077 |
| $\cos a = 1 - 1/2\, a^2$ | 0.8 | 0.34 | 0.110 |
| $\mathrm{tg}\, a = a$ | 0.4 | 0.17 | 0.055 |

В последних графах табл. 7 даны значения переменных, для которых приближенные формулы обеспечивают указанную в заголовке точность.

## 4.2. Приближенные числа справочных таблиц

В процессе работы в учебной лаборатории студент сталкивается с необходимостью использования математических таблиц и таблиц физических величин. Приводимые в этих таблицах данные являются в подавляющем большинстве случаев приближенными числами и имеют погрешность. Для ее определения необходимо помнить, что в числовых данных справочных таблиц принято записывать только верные цифры. Следовательно, абсолютная погрешность всех этих данных не должна превышать половины единицы последнего разряда приводимого в таблице значения интересующей нас величины. Например, табличному значению удельного сопротивления меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м соответствует предельная абсолютная погрешность $\Delta\rho \approx \pm 0{,}05 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Для коэффициента поверхностного натяжения воды в таблице приведено $\sigma = 72$ мН/м. Это означает, что абсолютная погрешность приведенного значения $\Delta\sigma = \pm 0{,}5$ мН/м.

## 4.3. Как приводить и использовать погрешности

Согласно формуле (23), результат измерений величины $X$ принято записывать вместе с погрешностью $\Delta X$ и доверительной вероятностью $\alpha$. Величина $\Delta X$ в этой записи служит оценкой погрешности и, очевидно, не может приводиться с большой точностью. Действительно, запись измеренного значения $X = 81,327 \pm 0,4241$ следует считать неверной, так как говорить о значениях цифр в тысячном и даже в десятитысячном разрядах величины $\Delta X$ при условии, что последняя верная цифра наилучшего измеренного значения $\overline{X}$ находится в разряде единиц, по крайней мере бессмысленно.

Приведенный пример указывает на необходимость округления погрешностей и наилучших значений измеренных величин при записи результатов измерений. В общем случае точность округления погрешностей при записи результата обусловлена точностью методов обработки результатов измерений. Однако для учебной лаборатории можно сформулировать следующие простые и общепринятые правила:

- погрешности измерений должны округляться до одной значащей цифры;

- последняя цифра результата и последняя цифра его абсолютной погрешности должны принадлежать к одному и тому же десятичному разряду.

В соответствии с этими правилами верная запись приведенного выше значения величины $x$ имеет вид $x = 81.3 \pm 0.4$.

Существует только одно важное исключение, касающееся первого из этих правил. Это когда первая значащая цифра при округлении погрешности оказывается равной единице. Во избежание грубой ошибки при округлении в этой ситуации у приводимого значения следует сохранять не одну, а две значащие цифры. Поясним сказанное примером. Пусть в результате расчета для погрешности некоторой величины $x$ получено значчние $\Delta x = 0,127$. Округление этого числа до $\Delta x = 0,1$ означает уменьшение ошибки выполненного измерения на 27%, что существенно. Поэтому более правильно сохранить две значащие цифры и записать результат $\Delta x = 0,13$.

Приведенные выше правила округления и записи абсолютных погрешностей распространяются и на относительные погрешности.

В заключение этого раздела скажем несколько слов об использовании погрешностей при обсуждении результатов эксперимента. Утверждения "измеренная величина $x = 12,7 \pm 0,3$" или "закон сохранения импульса примерно выполняется", которыми ограничивается в выводах большинство студентов, не представляют особого интереса. Значительно полезнее сравнить полученный результат с ранее известным значением измеряемой величины или с результатами теоретических предсказаний. Для сравнения значений двух приближенных чисел пользуются понятием различия.

***Различие*** - это разность между двумя приближенными значениями одной и той же величины. Различия могут быть ***значимыми*** и ***незначимыми***.

Различия между двумя измеренными значениями $\bar{x}_1 \pm \Delta x_1$ и $x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2$ величины X являются незначимыми, если при изображении этих значений на числовой прямой соответствующие доверительные интервалы перекрываются (рис 6а). Если это условие не выполнено, то различие является значимым (рис. 6б).

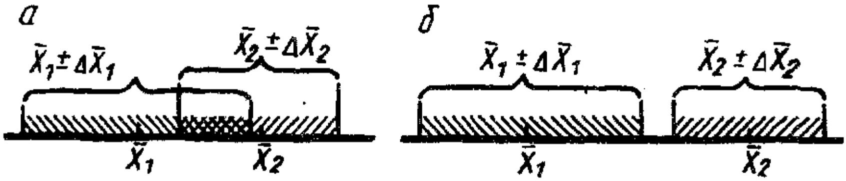



Рис. 6

Очевидно, что во втором случае утверждение о равенстве двух измеренных величин неверно. Утверждение о равенстве двух измеренных величин, различие которых незначимое, справедливо только в рамках точности выполненных измерений.

# 5. Графические методы представления результатов измерений

## 5.1. Требования, предъявляемые к графикам

Представление результатов измерений в виде графиков отличается простотой и наглядностью и позволяет решать разнообразные задачи. Во-первых, графики строят, чтобы определить некоторые величины -обычно угол наклона или отрезок, отсекаемый на оси ординат. Во-вторых, графики дают возможность выявить характер функциональной зависимости между величинами и установить эмпирическое соотношение, связывающее их. В-третьих, графики позволяют более наглядно проводить сравнение экспериментальных данных с теоретической кривой. Построение графиков непосредственно во время работы в лаборатории помогает следить за ходом зависимости и избегать грубых ошибок.

При оформлении графического материала в учебной лаборатории необходимо придерживаться следующих требований:

- графики должны выполняться на миллиметровой бумаге;

- по горизонтальной оси принято откладывать независимую переменную, т.е. величину, значение которой задает сам экспериментатор, а по вертикальной - величину, которую он при этом определяет;

- координатные оси вычерчиваются сплошными линиями. Стрелок на концах координатных осей не ставят;

- по осям координат должны быть указаны условные обозначения и размерности отложенных величин в принятых сокращениях;

- пересечение координатных осей не обязательно должно совпадать с нулевыми значениями x и y. При выборе начала координат следует стремиться максимально использовать всю площадь чертежа;

- график должен быть достаточно точным. Наименьшее расстояние, которое можно отсчитать по графику, должно быть не меньше величины абсолютной погрешности выполненных измерений;

- масштаб графика следует выбирать простым. Числовые значения масштаба шкал осей координат пишут за пределами графика (левее оси ординат и ниже оси абсцисс);

- экспериментальные точки на графике следует отмечать хорошо выделяющимися знаками (кружочками, крестиками и т.д.), через которые необходимо провести "наилучшую" плавную кривую, а не ломаную линию;

- для раскрытия содержания график сопровождается подписью.

## 5.2. Понятие о методе наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов - один из стандартных методов статистики, служащий для определения наилучших, т.е. наиболее вероятных, параметров линии, проходящей через набор экспериментальных точек. Основой метода является утверждение, что сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от наилучшей кривой $y=f(x)$ по вертикальному направлению должна быть минимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \min \qquad (39)$$

Для вывода уравнения, описывающего наилучшую линию, отвечающую данному набору экспериментальных точек, разложим функцию $y=f(x)$ в ряд Тейлора

$$y=f(x)\ A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_Nx^N = \sum_{i=1}^{N} A_i x^i . \qquad (40)$$

Здесь $A_i$- постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Условие (39) позволяет получить выражения для коэффициентов, на основе экспериментальных данных и, следовательно, записать искомую зависимость. Эта найденная зависимость используется для построения наилучшей линии $y=f(x)$.

Особенно просто описанная процедура реализуется для линейной зависимости

$$y = A_0 + A_1x \ , \qquad (41)$$

очень широко распространенной в физике.

Пусть путем измерений физических величин x и y получен ряд значений $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$, которые, будучи нанесены на координатную сетку, позволяют прийти к выводу, что зависимость является линейной. Задача состоит в том, чтобы найти такие коэффициенты $A_0$ и $A_1$, при которых прямая (41) наилучшим образом проходила через экспериментальные точки.

Для ее решения, согласно (39), можно записать

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - A_0 - A_1 x_i)^2 = \min \qquad (42)$$

Используя необходимые условия существования экстремума, после дифференцирования равенства (42) по $A_0$ и $A_1$ получаем

$$\left.\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{N}(y_i - A_0 - A_1 x_i) &= 0 \\
-2\sum_{i=1}^{N}(y_i - A_0 - A_1 x_i)x_i &= 0
\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
nA_0 + A_1\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}y_i &= 0 \\
A_0\sum_{i=1}^{n}x_i + A_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i y_i &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Решаем систему линейных уравнений (43) относительно $A_0$ и $A_1$, для коэффициентов линейной зависимости (41) имеем:

$$A_0 = \frac{\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}, \tag{44}$$

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}, \tag{45}$$

где, как обычно, $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - средние арифметические измеренных значений величин $x$ и $y$. Прямая (41), коэффициенты которой рассчитаны по формулам (44) и (45), является наилучшей.

***Пример 12.*** Для экспериментальной проверки закона Гука были измерены растяжения пружины $l_i$, обусловленные нагрузками $m_i$, вызывающими деформацию. Результаты измерений представлены в табл. 8, а соответствующие им экспериментальные точки - на рис. 7. Методом наименьших квадратов найти зависимость $l\,(m)$.

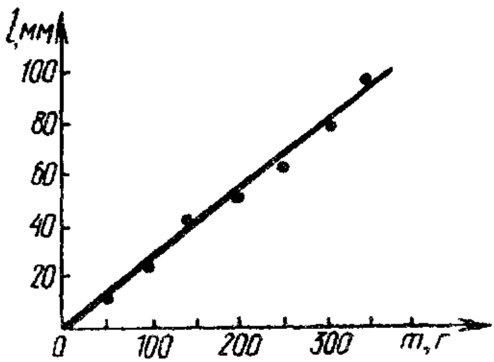


Рис. 7.

*Табл. 8. Нагрузки и растяжения пружины*

| $m_i$, г | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_i$, мм | 14 | 26 | 44 | 54 | 63 | 85 | 102 |

Решение. Положение экспериментальных точек позволяет сделать вывод о линейном характере исследуемой зависимости. Для построения наилучшей прямой $l(m) = A_0 + A_1 m$ рассчитаем коэффициенты $A_0$ и $A_1$ по формулам (44) и (45).

Учитывая, что $\bar{y} = \bar{l} = 55{,}43$ мм, $\bar{x} = \bar{m} = 200$ г и $n = 7$, получаем

$$A_0 = \frac{\bar{l}\sum_{i=1}^{7} m_i^2 - \bar{m}\sum_{i=1}^{7} m_i l_i}{\sum_{i=1}^{7} m_i^2 - 7(\bar{m})^2} = -1{,}85 \approx -1{,}9\text{мм}$$

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i l_i - 7\bar{m}\bar{l}}{\sum_{i=1}^{7} m_i^2 - 7(\bar{m})^2} = 0{,}29 \approx 0{,}3\text{мм}/$$

Таким образом, уравнение наилучшей прямой имеет вид $l = -1.9 + 0.3\ m$. Прямая, проведенная согласно этому уравнению, изображена на рис. 7. ■

В тех случаях, когда экспериментальные точки не накладываются на прямую, основная трудность при использовании метода наименьших квадратов заключается в выборе числа членов ряда (40). В этой ситуации наилучший выход заключается в спрямлении кривой путем замены переменных или использовании специально выбранного масштаба. Так, для линеаризации одной из наиболее важных в физике нелинейных функций - экспоненты $y = Ae^{Bx}$ достаточно просто взять логарифмы от обеих частей: $\ln y = \ln A + Bx$. Зависимость $\ln y$ от $x$ является линейной и может быть обработана с помощью формул (44) и (45).

### 5.3. Метод парных точек

Простой метод построения наилучшей прямой (41), который часто оказывается вполне удовлетворительным. Он особенно хорош в том случае, когда значения $x_i$ эквидистантны, т.е. находятся на одинаковом расстоянии друг от друга.

Допустим, что у нас имеется 8 точек, лежащих приблизительно на одной прямой. Требуется найти наилучшее значение углового коэффициента $A_1$ и его погрешность. Пронумеруем точки по порядку от 1 до 8 (рис.8). Возьмем точки 1 и 5. Ими определена некоторая прямая и, следовательно, угол ее наклона. Рассматривая по аналогии другие пары точек, получим в итоге четыре значения тангенса угла наклона. В качестве наилучшего значения $A_1$ выберем

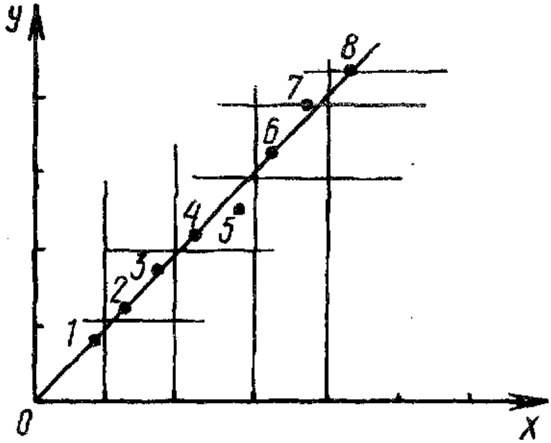


Рис. 8.

среднее арифметическое $\bar{A}_1$ и обычным способом (см. "Оценка погрешности прямого измерения") найдем его погрешность.

Такой метод дает удовлетворительные результаты лишь тогда, когда величины $x_5 - x_1$, $x_6 - x_2$, $x_7 - x_3$ и $x_2 - x_4$ примерно одинаковы. Полученная прямая линия будет иметь угловой коэффициент $\bar{A}_1$ и проходить через точку $(\bar{x},\bar{y})$. Отметим, что прямая, найденная методом наименьших квадратов, всегда проходит через эту точку.

Методом парных точек пользуются в основном тогда, когда требуется определить лишь наклон прямой.

# 6. Выполнение работ физпрактикума и оформление отчетов

## 6.1. Подготовка к работе и ее выполнение

Самостоятельная работа студентов при подготовке к занятиям физического практикума может быть разделена на три этапа:

- теоретическая подготовка;
- знакомство с конструкцией установки и определение ее погрешности;
- составление плана работы и подготовка таблиц для записи результатов наблюдений.

На первом этапе студенты изучают по рекомендуемой литературе сущность тех явлений, которые будут исследоваться экспериментально, а также теоретические обоснования методов измерений и исследований.

На втором этапе (в лаборатории) изучается конструкция предложенной установки, ее характеристики по прилагаемой технической документации, выявляются факторы, влияющие на точность измерений, приближенно определяется относительная погрешность установки и на этой основе выбирается целесообразная точность измерений отдельных физических величин.

Завершением подготовки (и показателем ее эффективности) является составление плана эксперимента. План представляет собой по существу анализ поставленной экспериментальной задачи, т.е. расчленение ее на ряд отдельных этапов. При составлении плана выясняется, какие величины измеряются прямо и какие - косвенно, вычерчиваются таблицы для записи результатов наблюдений, а также результатов измерений и их погрешностей.

На занятиях весь этот материал предъявляется преподавателю , который путем собеседования выявляет степень подготовленности студента к выполнению работы и решает вопрос о допуске к ней.

Получив допуск, студент проводит эксперимент, выполняет необходимые вычисления, строит графики, анализирует их, делает необходимые выводы и предъявляет результаты преподавателю.

### 6.2. Составление отчета

Отчет о выполнении лабораторной работы физического практикума должен содержать:

1) название и цель работы;

2) перечень приборов и принадлежностей с указанием их технических характеристик;

3) необходимые расчетные формулы для искомых величин и погрешностей с пояснением обозначений;

4) план эксперимента (предварительную оценку погрешностей измерений);

5) ход выполнения работы с расчленением на отдельные упражнения. (Здесь приводятся таблицы с результатами наблюдений и вычислений, графики, а также необходимые расчеты);

6) окончательные результаты измерений и выводы;

7) замечания по работе установки и предложения по ее совершенствованию, если они возникли в процессе выполнения работы.

# 7. Приложения

## 7.1. Задачи и упражнения

*1.* Погрешность эксплуатируемых в настоящее время счетчиков электроэнергии составляет в среднем 2%. К какой неопределенности в учете электроэнергии (в абсолютных цифрах) приводит этот уровень точности электросчетчиков при достигнутой в стране выработке электроэнергии 1600 млрд кВт·ч за год?

*2.* Увеличение влажности угля на 1% снижает теплоту его сгорания на 1,25%. Какое дополнительное количество угля сверх годовой добычи 800 млн.т требуется добыть для компенсации потерь тепла из-за неверного определения влажности угля приборами, имеющими погрешность 2%?

*3.* Известно, что в определении направления на север по Полярной звезде турист делает ошибку 2°. При движении в густом кустарнике по болоту ему приходится отклониться от выбранного азимута, например, еще на 3° . Определите, на какое расстояние отклонится турист от выбранного направления с ошибкой в определении азимута, равной 5°, пройдя путь 500 м; 100 м; 3000 м.

*Указание.* Азимутом называют угол между направлением на север и направлением движения.

*4.* Даны результаты измерений: (682,3 ± 0,4) мм; (0,42 ±0,05) мм; (2721,32 ±0,19) мм. Укажите соответствующие им доверительные интервалы. Сравните эти измерения по точности.

*5.* Случайными или систематическими являются погрешности, возникающие в следующих случаях: а) при расчете скорости движения тела по наклонной плоскости вследствие пренебрежения трением; б) при смещении шкалы манометра из-за потери одного из крепежных винтов; в) при измерении толщины бруска в разных местах; г) при измерении объема мензуркой из-за использования горячей воды; д) при определении массы дробинки путем взвешивания n отдельных дробинок?

*6.* Показания электроизмерительного прибора снимаются с учетом влияния магнитного поля Земли в одном положении шкалы и в другом - с поворотом ее на 180° в рабочей плоскости. Чему будет равно значение измеряемой величины? Классифицируйте погрешность, обусловленную влиянием магнитного поля Земли, и укажите метод исключения погрешности.

*7.* Для устранения погрешности, обусловленной равноплечностью двухчашечных весов, вначале взвешивают груз, помещая его на одну чашечку весов, а гири на другую. Потом груз и гири меняют местами и вновь добиваются равновесия добавлением (убавлением) гирь. Чему будет равно значение измеряемой массы? Укажите метод исключения погрешности.

*8.* Как определить, какая погрешность больше: линейки или объекта принятой модели при измерении объема тела, принятого по форме за прямоугольный параллелепипед. Классифицируйте эти погрешности.

*9.* Погрешность электроизмерительного прибора определяется, кроме прочих факторов, постоянством его сопротивления. Найдите относительное изменение погрешности вольтметра сопротивлением R=1000 Ом и индуктивностью L=11,2 мГн, если его использовали для измерений в цепи переменного тока с частотой 1000 Гц вместо 50 Гц, на которую рассчитан прибор.

***10.*** При определении класса точности ваттметра, рассчитанного на 750 Вт, были получены следующие данные: 47 Вт - при мощности 50 Вт; 115 Вт - при 100 Вт; 204 Вт - при 200 Вт; 413 Вт - при 400 Вт; 728 Вт - при 750 Вт. Каков класс точности прибора?

***11.*** Определите относительную приборную погрешность измерения в начале шкалы (для 30-го деления) для прибора класса 0,5, имеющего шкалу в 100 делений. Во сколько раз эта погрешность больше погрешности на последнем (сотом) делении шкалы прибора?

***12.*** Какого класса точности нужно взять измерительный прибор, что бы в середине шкалы его погрешность не превышала 1%?

***13.*** Для измерения силы тока I в интервале от 0,1 до 0,5 мА имеется магнитоэлектрический миллиамперметр с пределом измерения $I_{max}$ =0,5 мА. Какого класса точности должен быть прибор, чтобы относительная погрешность измерения тока не превышала 1%?

***14.*** Для измерения напряжения используют два параллельно включенных вольтметра: первый - типа В-140 класса точности $K_1$= 2,5 с пределом измерений $U_{max1}$=30 В;

второй - тип М-366 класса точности $K_2$= 1,0 с пределом измерения $U_{max2}$= 150 В. Показания какого вольтметра точнее, если первый показал $U_1$= 29,2 В, а второй $U_2$= 30,0 В?

*15.* Микроамперметр, рассчитанный на 100 мкА, имеет шкалу в 200 делений. Определите цену деления и возможную погрешность в делении шкалы, если на шкале прибора указан класс точности 1,0.

*16.* В паспорте полученных у лаборанта весов указано, что они класса 3б. Назовите допускаемую погрешность весов.

*17.* При изготовлении измерительного прибора, исходя из конкретных условий производства, было признано удовлетворительным иметь значение доверительной вероятности того, что метрологические характеристики прибора не выйдут за пределы допуска, равного 0,995. На сколько выпущенных приборов приходится один забракованный?

*18.* Как часто может появиться погрешность, выходящая за пределы доверительного интервала $\pm 3\sigma$ ; $\pm 2\sigma$ ?

*19.* Студент измеряет некоторую величину у много раз и вычисляет среднее значение $\bar{y}$ = 23,0 и стандартное отклонение $\sigma$ = 1,0. Какую долю отсчетов студента вы ожидали бы найти между: а) 22,0 и 24,0; б) 22,5 и 23,5; в) 21,0 и 25,0? г( 21,0 и 23,0; д) 24,0 и 25,0? В каком интервале будут находиться 50% выполненных расчетов?

*20.* Результаты отдельных наблюдений некоторой величины х равны 0,343; 0,338; 0,340; 0,341; 0,339; 0,342;

0,343; 0,340; 0,331; 0,349. Считая систематические погрешности устраненными, определите наилучшее значение и границу абсолютной погрешности результата измерения величины X при доверительной вероятности $\alpha$=0,95. Выявите результаты измерений, являющиеся промахами.

*21.* При измерении времени 20 колебаний маятника получены результаты: 32,8; 32,6; 32,2; 32,6; 32,4; 35,8; 32,4 с. Имеются ли в этой серии измерений промахи?

*22.* Результаты отдельных наблюдений при измерении расстояния между спектральными линиями компаратором равны: 0,573; 0,580; 0,583; 0,580; 0,575; 0,577; 0,580; 0,576 мм. Допускаемая абсолютная погрешность компаратора определяется по формуле $\Delta L_{пр}$=(0,005+0,00011 L) мм. Определите наилучшее значение и границу абсолютной погрешности результата измерения при доверительной вероятности $\alpha$= 0,95.

*23.* Для определения количества теплоты Q, выделяемой в проводнике, были измерены: сила тока I=(10,230 ± ±0,015) ; сопротивление R=(11,68 ± 0,01) Ом и время t = (405,2 ± 0.1) с. Определите наилучшее значение Q и погрешность его измерения, пользуясь; а) методом "шаг за шагом"; б) общей формулой для расчета погрешностей косвенных измерений.

*24.* Студент, проверяя формулу для периода колебаний пружинного маятника, должен убедиться в справедливости соотношения $(t_1 / t_2)^2 = (m_1/m_2)$, где $t_1$ и $t_2$- время n полных колебаний маятника с массами $m_1$ и $m_2$

соответственно. Выполнив измерения, он получил $t_1 = (12.6 \pm 0.6)$ с, $t_2 = (16.8 \pm 0.7)$ с, $m_1 = (50 \pm 1)\ 10^{-3}$ кг, $m_2 = (100 \pm 2)\ 10^{-3}$ кг. Выясните, используя эти результаты, справедливо ли приведенное соотношение.

*25.* Укажите среди приведенных ниже чисел точные и приближенные: а) футбольный матч закончился со счетом 3:2; б) показания на индикаторе микрокалькулятора 138.50247; в) $\pi = 3.14$; г) напряжение в городской электросети U= 220 В; д) наибольшая глубина Мариинской впадины 11 022 м.

*26.* Определите верные, неверные и сомнительные цифры в следующих результатах: а) период колебания маятника $T = (1.231 \pm 0.12)$ с; б) фокусное расстояние линзы $F = (14.5 \pm 0.4)$ см; в) удельная теплоемкость воды $c = (4.190 \pm 0.004)\ 10^{-3}$ Дж/(кг К ); г) при стрельбе в мишень стрелок набрал 42 очка из 50 возможных.

*27.* Выразите в единицах СИ и запишите в нормальной форме следующие приближенные числа, сохраняя их точность: а) сила тока I=12.5 мА; б) масса тела m= 500 г.; в) диаметр проводника d = 0.072 мм; г) длина стержня l = 120 см. Сколько значащих цифр имеет каждое из этих чисел?

*28.* Выполните действия, считая все числа приближенными:

а) $$\frac{(2{,}74^2+0{,}1361)\cdot 1{,}356}{3{,}48\cdot 0{,}051};$$

б) $$\frac{(1{,}2583\cdot 10^5-5{,}428\cdot 10^3+6{,}41)\cdot 3{,}250}{(\sqrt[3]{2{,}72}+0{,}00237)}.$$

*29.* Цилиндр имеет диаметр около 3 мм и длину, почти равную 5 см. С какой точностью нужно измерить все эти величины, чтобы определить объем цилиндра с: а) двумя верными значащими цифрами? б) тремя верными значащими цифрами? Какие значения числа $\pi$ следует использовать в первом и во втором случаях?

*30.* Ювелирное изделие изготовлено из сплава серебра и золота. Его масса $m = 183.60$ г., объем $V = 11.71$ см$^3$. Можно ли рассчитать массу серебра $m_1$ и массу золота $m_2$ в изделии с точностью до 1 г, если плотности этих материалов определены в таблице с тремя верными значащими цифрами: $\rho_1 = 10.5$ г/см$^3$, $\rho_2 = 19.3$ г/см$^3$.

## 7.2. Ответы и указания

*1.* 32 млрд. кВт·ч. *2.* 20 млн. т. *3.* 44 м; 87 м; 262 м. *4.* Второе измерение весьма грубое, последнее - наиболее точное. *5.* а), б), г) -погрешность систематическая; в) и д) - случайная. *6.* Среднему арифметическому показаний прибора. Погрешность систематическая. Метод компенсационной погрешности по знаку. *7.* Среднему геометрическому двух измерений. Метод противопоставления. *8.* Погрешность линейки - инструментальная систематическая ошибка; погрешность отклонения объекта исследования от идеальной модели - методическая систематическая ошибка. *9.* 22%. *10.* K = 4.0. *11.* $\varepsilon_{пр30}=1.1\%$; $\varepsilon_{пр100}=0.33\%$.

$\varepsilon_{пр30} > \varepsilon_{пр100}$ более чем в три раза. ***12.*** $K \le 0.5$. ***13.*** $K \le 0.2$. ***14.*** Первого, почти в два раза. ***15.*** $C = 0.5$ мкА/дел. Допускаемая погрешность 2 деления шкалы. ***16.*** 0.002%. ***17.*** Один на 200 выпущенных приборов. ***18.*** Один раз на 333 измерения; на 167 измерений. ***19.*** а) 68%; б) 38%; в) 95%; г) 48%; д) 24%, $22.3 \le y \le 23.7$. ***20.*** $X = 0.341 \pm 0.003$; $\varepsilon = 1\%$. В данной серии измерений промахов нет. ***21.*** Имеется в шестом наблюдении. ***22.*** $L = 0.578 \pm 0.006$ мм. ***23.*** а) $Q = (495 \pm 2)$ кДж; $\varepsilon = 0.4\%$. При использовании квадратичного сложения можно получить более точный результат $Q=(495.3 \pm 1.5)$ кДж, $\varepsilon = 0.3\%$; б) В этом случае расчетная формула имеет вид

$$\Delta Q = \pm\sqrt{(2\bar{I}\bar{R}\bar{t})^2(\Delta I)^2 + (\bar{I}^2\bar{t})^2(\Delta R)^2 + (\bar{I}^2\bar{R})^2(\Delta t)^2}$$

и приводит к тому же результату. ***24.*** Да, справедливо. ***25.*** а) точное, б)- д) - приближенные. ***26.*** а) 1 - верная цифра, 2 - сомнительная, 3 и 1 - неверные; б) 5 - сомнительная цифра; в) 4,1 и 9 - верные цифры, 0 - сомнительная; г) все цифры верные, так как число точное. ***27.*** $I = 12.5\ 10$ А; $m = 500 \cdot 10^{-3}$ кг; $d = 72 \cdot 10$ м; $l = 1.20$ м. ***28.*** а) 58; б) $280 \cdot 10^3$. ***29.*** С точностью до десятых долей миллиметра, $\pi = 3.14$; б) С точностью до сотых долей миллиметра, $\pi = 3.142$. ***30.*** Нет, нельзя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Зайдель А.Н.** Погрешности измерений физических величин.-Л.: Наука, 1985 - 112 с.

2. **Кембровский Г.С.** Приближенные вычисления и методы обработки результатов измерений в физике.-Мн.:издательство Университетское, 1990- 189 с.

3. **Тейлор Дж.** Введение в теорию ошибок.-М.: Мир, 1985 - 210 с.

4. Физический практикум /А.М. Саржевский, В.П. Бобрович, Г.Н. Борздов и др. -Мн.: издательство Университетское, 1986 - 352 с.

5. **Шабалин С.А.** Прикладная метрология в вопросах и ответах.-М.: Стандарты, 1986 - 195 с.

Учебное издание
1997 г.

**ЕМЕЛЬЯНОВ ВИКТОР АНДРЕЕВИЧ**
**ЛИН ДМИТРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ**
**ШОЛОХ ВЛАДИМИР ФЕДОРОВИЧ**

# МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРИИ ФИЗПРАКТИКУМА

Ответственный за выпуск
А.Б. Бочкарева

Подписано в печать 21.03.1997 г. Формат 84x108 1/32
Печ. л. 2,9. Тираж 500 экз. Заказ 38. Цена договорная.

ПК ООО "Бестпринт". Лицензия ЛВ № 940.
Г. Минск, ул. Фабрициуса, 5.
Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии
ПК ООО "Бестпринт"