

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛИНЗЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ

В.Н. Мануилов
В.Ю. Заславский
П.Д. Лихтерова

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

В.Н. Мануилов
В.Ю. Заславский
П.Д. Лихтерова

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛИНЗЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом
радиофизического факультета для студентов ННГУ,
обучающихся по направлениям подготовки
03.03.03 и 03.04.03 «Радиофизика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные
технологии», специальностям 10.05.02 «Информационная
безопасность телекоммуникационных систем»,
11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижегород
2023

УДК 621.38(075.8)

ББК 32.85Я73

М24

Рецензенты: д.ф.-м.н., **А.В. Савилов**, к.ф.-м.н., **А.А. Вихарев**

М24 ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛИНЗЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ.
Авторы: Мануилов В.Н., Заславский В.Ю., Лихтерова П.Д.: Учебное пособие. –
Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2023. – 69 с.

Учебное пособие посвящено основам теории электронных линз и электронных микроскопов. Приведены теоретические модели, описывающие данный класс устройств, использующихся в современных приборах вакуумной электроники.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 и 03.04.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы».

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ д.ф.-м.н. **Е.З. Грибова**

УДК 621.38(075.8)

ББК 32.85Я73

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	5
2. ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ	7
2.1. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ	7
2.2. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ	10
2.3. ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПРЕЛОМЛЕНИЯ	13
2.4. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД.....	15
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЯХ	20
3.1. УРАВНЕНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	26
4. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЛИНЗ	28
4.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЗЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ПОЛЯ	29
4.2. РАСЧЕТ ТОНКОЙ ИММЕРСИОННОЙ ЛИНЗЫ.....	32
4.3. ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ ИММЕРСИОННЫХ ЛИНЗ	35
4.4. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ТОЛСТОЙ ЛИНЗЕ	37
4.5. ЛИНЗЫ-ДИАФРАГМЫ	38
4.6. ФОКУСНОЕ РАССТОЯНИЕ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ-ДИАФРАГМЫ.....	41
4.7. АНОДНОЕ ОТВЕРСТИЕ КАК РАССЕЙВАЮЩАЯ ЛИНЗА-ДИАФРАГМА	43
4.8. ИММЕРСИОННЫЙ ОБЪЕКТИВ	45
4.9. ПРОЖЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫХ ТРУБОК	46
4.10. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ.	47
5. МАГНИТНЫЕ ЛИНЗЫ	49
5.1. УРАВНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	49
5.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАГНИТНЫХ ЛИНЗ	49
6. ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ	60

6.1. ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ ПРОСВЕЧИВАЮЩЕГО ТИПА.....	60
6.2. ОТРАЖАТЕЛЬНЫЙ МИКРОСКОП.....	64
6.3. РАСТРОВЫЙ МИКРОСКОП.....	65
6.4. ПРОЕКЦИОННЫЕ МИКРОСКОПЫ.....	66
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	69

1. ВВЕДЕНИЕ

Считается, что на расстоянии наилучшего видения (~25 см) человеческий глаз может раздельно увидеть (разрешить) две точки, если расстояние между ними $d = 0.176$ мм = 176 микрон. Уже в средние века (15-16 век н.э.) стало очевидно, что такой разрешающей способности явно недостаточно для имевшихся даже в то время потребностей как в технике, так и в медицине. Примерно в это же время (1600-1700 гг. н.э.) были предложены и реализованы первые варианты оптических микроскопов (З. Янсен, Г. Галилей, Х. Гюйгенс, А. Левенгук, Р. Гук). Понадобилось примерно еще 150 лет развития оптики, чтобы появилась отработанная и наиболее распространенная в настоящее время схема составного микроскопа, обеспечивающая разрешение $d = 0.2$ микрон, т.е. примерно в 1000 раз лучше, чем человеческий глаз. Оптические микроскопы работают в видимом диапазоне длин волн и вследствие явления дифракции их предельная разрешающая способность пропорциональна длине волны λ видимого света, что ограничивает разрешающую способность указанными выше значениями. Для дальнейшего улучшения разрешающей способности, очевидно, надо уменьшать длину волны, т.е. необходимо перейти к использованию увеличивающих устройств, использующих излучение с меньшей длиной волны, т.е. имеющего не световую природу. Тот факт, что электрон обладает волновыми свойствами, может быть использован для снижения минимально различимого устройством объекта до нескольких Ангстрем [1]. Поэтому в первой половине 20-го века, когда уже достаточно высокого уровня достигла квантовая механика, и, в частности, были изучены волновые свойства электронов, для которых длина волны Де-Бройля на несколько порядков меньше, чем для фотонов видимого света, появилась идея использовать для получения изображения вместо лучей света потоки легких элементарных частиц – электронов. В результате в 1931 году Эрнст Руска создал первый электронный микроскоп (в 1986 году он получил за эту работу Нобелевскую премию).

Простой перенос законов обычной световой оптики, в частности – теории линз, оказывается неэффективным при разработке электронных микроскопов. Поэтому, начиная с первой трети 20-го века, появилась и начала интенсивно развиваться новая область физики – электронная оптика [2-6], которая в частности позволила разработать теорию электронных линз, обеспечивших реализацию уже к середине 20-го века электронных микроскопов с увеличением порядка 100000, а в дальнейшем довести его до 1000000. Электронные линзы нашли своё применение не только в

микроскопии, но и в технологии создания СБИС, технологии сварки и резки металлов, разработке мощных источников электромагнитного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн и ряде других приложений. Таким образом, изучение теории электронных линз и принципов работы электронных микроскопов представляет интерес для специалистов, специализирующихся в указанных выше областях либо использующих их в своей работе как рабочий инструмент.

Предлагаемое учебное пособие состоит из пяти разделов. В первом коротко излагаются вариационные принципы динамики заряженных частиц, из которых в дальнейшем выводятся уравнения электронных линз. Второй раздел посвящен выводу общих уравнений, описывающих как электрические, так и магнитные линзы. Третий и четвертый разделы излагают теорию электрических и магнитных линз и их классификацию. Наконец, пятый раздел посвящен краткому изложению принципов работы и устройства электронных микроскопов.

2. ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

2.1. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Из теоретической механики известно [7], что для описания движения динамической системы удобно использовать функцию Лагранжа

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n). \quad (1)$$

Здесь q_i – обобщенные координаты, \dot{q}_i – обобщенные скорости, n – **число степеней свободы**. Если L известна, то движение системы описывается системой уравнений Лагранжа. Нас интересует движение одной заряженной частицы – электрона, поэтому $n = 3$ и движение электрона описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Введем единичные орты по осям координат $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$.

Напишем уравнения Лагранжа для **каждой оси**, домножим на соответствующий орт и сложим, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right] - \\ - \left[\vec{i}_1 \frac{\partial L}{\partial q_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial L}{\partial q_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial L}{\partial q_3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Первая скобка дает **градиент L в пространстве скоростей**, вторая – **градиент в обычном трехмерном пространстве координат**. Из теоретической механики известно, что компоненты обобщенного импульса и обобщенной силы определяются как

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Значит, наше уравнение можно свернуть в

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0. \quad (5)$$

Поскольку обобщенный импульс и обобщенная сила определяются как

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P} \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{F},$$

то уравнение Лагранжа можно переписать в виде, аналогичном уравнению Ньютона:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \vec{F} = 0. \qquad (6)$$

Очевидно, уравнения Ньютона и уравнения Лагранжа эквивалентны, но преимущество уравнений Лагранжа заключается в том, что если известна функция Лагранжа, то соответствующие уравнения легко можно записать для любой системы координат. Можно показать, что для электрона функция Лагранжа имеет вид:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e_0 U - e_0 (\vec{A}, \vec{v}). \qquad (7)$$

Здесь U – потенциал электрического поля, \vec{A} – магнитный векторный потенциал, т.е.

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \qquad (8)$$

Доказательство этого утверждения проводится путем подстановки функции Лагранжа в уравнения Лагранжа. Тогда, если учесть, что

$$\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad (9)$$

то после подстановки эти уравнения приводятся к уравнениям Ньютона

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = -e_0 \vec{E} - e_0 [\vec{v}, \vec{B}]. \qquad (10)$$

Из выражения для функции Лагранжа и определения обобщенного импульса следует, что обобщенный импульс может быть выражен через механический импульс и магнитный векторный потенциал как

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \frac{\vec{v}}{v} - e_0 \vec{A} = \\
&= \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - e_0 \vec{A} = \vec{p} - e_0 \vec{A}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Итак,

$$\vec{P} = \vec{p} - e_0 \vec{A}. \tag{12}$$

Это соотношение, в свою очередь, позволяет получить более компактную запись для функции Лагранжа

$$\begin{aligned}
L &= -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e_0 U - e_0(\vec{A}, \vec{v}) = \\
&= -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e_0 U - e_0(\vec{A}, \vec{v}) = \\
&= \frac{m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - (m c^2 - e_0 U) - e_0(\vec{A}, v) = \\
&= (m \vec{v}, \vec{v}) - e_0(\vec{A}, \vec{v}) - W = (\vec{p}, \vec{v}) - e_0(\vec{A}, \vec{v}) - W.
\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая теперь только что полученное выражение для обобщенного импульса и выражение для полной энергии электрона

$$W = m c^2 - e_0 U, \tag{14}$$

получаем, что

$$L = (\vec{p} - e_0 \vec{A}, \vec{v}) - W \tag{15}$$

и окончательно

$$L = (\vec{P}, \vec{v}) - W. \tag{16}$$

2.2. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

При изложении материала этого параграфа мы будем опираться на курс лекций по теоретической механике, и поэтому соответствующие утверждения приведем без доказательства. Базовым, при рассмотрении вариационных принципов динамики заряженных частиц является **принцип Гамильтона**.

Пусть частица перемещается из положения 1 в положение 2 за фиксированное время (см. рис.1):

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \quad t_2 - t_1 = \text{const.} \quad (17)$$

Тогда можно нарисовать множество возможных траекторий перемещения электрона (виртуальных траекторий a, b, c,...), как показано на рис. 1.

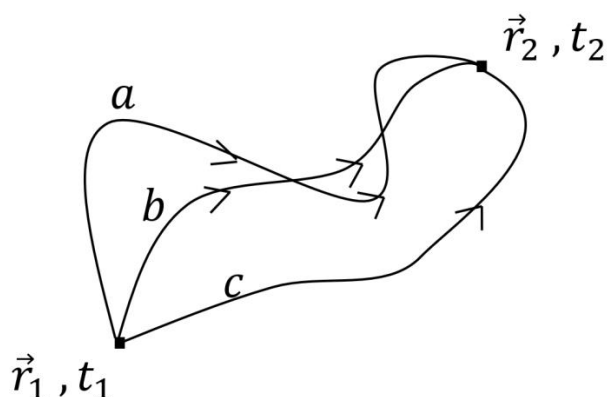


Рис.1. Возможные виртуальные траектории электрона при перемещении из точки 1 в точку 2

Согласно принципу Гамильтона, **реализуется та траектория**, для которой функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (18)$$

принимает **минимальное** (экстремальное) **значение**. Величина S называется **действием**. Здесь L – функция Лагранжа для электрона (см. уравнение (13)). Условие экстремума функционала находятся из уравнений Гаусса-Остроградского, которые в данном частном случае совпадают с уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (19)$$

Принцип Гамильтона справедлив при любых полях, действующих на частицу. Для рассматриваемых далее электронных линз действующие на частицу поля являются статическими. В этом случае выражение для функционала может быть упрощено, что позволяет перейти к так называемому **принципу укороченного действия**.

Пусть **поля - статические**, т.е. не имеют явной зависимости от времени, тогда сохраняется полная энергия частицы:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow W = mc^2 - e_0 U = const. \quad (20)$$

Так как

$$L = \vec{P}\vec{v} - W, \quad (21)$$

то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}\vec{v} dt - \int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}\vec{v} dt - \underbrace{W(t_2 - t_1)}_{const}, \quad (22)$$

т.е. экстремум функционала достигается тогда же, когда и экстремум **укороченного функционала**

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}\vec{v} dt. \quad (23)$$

В результате мы получаем **решение** задачи в **параметрическом виде**

$$q_i = q_i(t), \quad (24)$$

что часто неудобно, т.к. мы **не знаем форму траектории в пространстве**.

Получить явную форму траекторий в пространстве позволяет **принцип Мопертюи**.

Он также как и принцип укороченного действия, справедлив только для случая статических полей. Поскольку элемент длины дуги

$$d\vec{l} = \vec{v}dt,$$

то функционал имеет вид:

$$S' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{P}d\vec{l}. \quad (25)$$

Подынтегральное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\vec{P} = \vec{p} - e_0\vec{A} \Rightarrow \vec{P}d\vec{l} = \vec{p}d\vec{l} - e_0\vec{A}d\vec{l}. \quad (26)$$

Пусть электрон перемещается из точки 1 в точку 2 (рис.2). Введем единичный вектор \vec{s} , направленный по касательной к траектории.

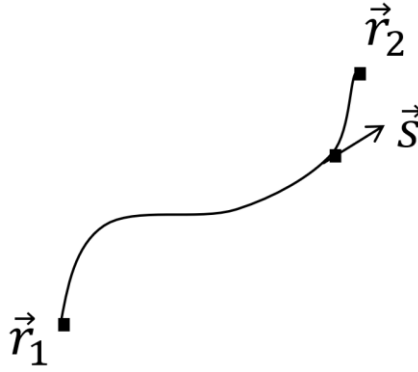


Рис.2. Траектория электрона и единичный вектор, касательный к траектории

Так как $\vec{p} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ и $d\vec{l} = \vec{s}dl$, следовательно, $\vec{P}d\vec{l} = pdl - e_0\vec{A}\vec{s}dl$. Выразим теперь величину модуля механического импульса через потенциал. Для этого воспользуемся известным соотношением для релятивистской массы электрона

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (27)$$

Возведем его в квадрат и домножим на знаменатель, тогда

$$(mv)^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2 = \frac{(mc^2)^2}{c^2} - m_0^2c^2. \quad (28)$$

Из закона сохранения энергии:

$$W = mc^2 - e_0U \Rightarrow mc^2 = W + e_0U, \quad (29)$$

тогда импульс

$$p = mv = \sqrt{\frac{(W + e_0U)^2}{c^2} - m_0^2c^2}. \quad (30)$$

И окончательно наш функционал может быть записан как

$$S' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left[\sqrt{\frac{(W + e_0U)^2}{c^2} - m_0^2c^2} - e_0\vec{A}\vec{s} \right] dl \quad (31)$$

2.3. ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Рассмотрим **нерелятивистское движение** электрона в статических полях, тогда $v/c \ll 1$ и полная энергия электрона может быть найдена как

$$\begin{aligned} W = mc^2 - e_0U &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - e_0U = \\ &= m_0c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) - e_0U = m_0c^2 + m_0 \frac{v^2}{2} - e_0U = const. \end{aligned} \quad (32)$$

С другой стороны, на катоде (потенциал катода принят за ноль) энергия электрона:

$$W = m_0c^2 + m_0 \frac{v_k^2}{2} - e_0 * 0 = m_0c^2 + e_0U_0 \quad (33)$$

Здесь введен эффективный тепловой потенциал

$$m_0 \frac{v_k^2}{2} = e_0U_0. \quad (34)$$

Преобразуем теперь выражение для импульса:

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{\frac{(W + e_0 U)^2}{c^2} - m_0^2 c^2} = \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + e_0(U + U_0))^2}{c^2} - m_0^2 c^2} = \\
&= \sqrt{m_0^2 c^2 + 2e_0 m_0 (U + U_0) + \frac{e_0^2 (U + U_0)^2}{c^2} - m_0^2 c^2} = \\
&= \sqrt{2m_0 e_0 (U + U_0) \left[1 + \frac{e_0 (U + U_0)}{2m_0 c^2} \right]} = \sqrt{2m_0 e_0 (U + U_0)}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку движение нерелятивистское, то $\frac{e_0(U+U_0)}{2m_0 c^2} \ll 1$ и последним слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Подставим теперь получившееся выражение в наш функционал, тогда

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left[\sqrt{2m_0 e_0 (U + U_0)} - e_0 \vec{A} \vec{s} \right] dl = \\
&= \sqrt{2m_0 e_0} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left[\sqrt{(U + U_0)} - \sqrt{\frac{\eta}{2}} (\vec{A}, \vec{s}) \right] dl,
\end{aligned} \tag{36}$$

значит, экстремум достигается тогда же, когда и у функционала

$$S_{\text{э/о}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left[\sqrt{(U + U_0)} - \sqrt{\frac{\eta}{2}} (\vec{A}, \vec{s}) \right] dl. \tag{37}$$

Вспомним обычную световую оптику. Если есть неоднородная оптическая среда с показателем преломления

$$n = n(\vec{r}),$$

то справедлив принцип Ферма: оптическая длина пути должна быть минимальна:

$$S = \int n dl - \min.$$

Значит, если

$$n = \sqrt{U + U_0} - \sqrt{\frac{\eta}{2} (\vec{A}, \vec{s})}, \quad (38)$$

то форма траекторий совпадает с формой оптического луча.

Поэтому величина

$$n_{э/о} = \sqrt{U + U_0} - \sqrt{\frac{\eta}{2} (\vec{A}, \vec{s})} \quad (39)$$

называется **электронно-оптическим коэффициентом преломления.**

Формула для электронно-оптического коэффициента преломления позволяет сделать **несколько общих выводов о характере движения электрона:**

1. Среда будет анизотропной (свойства зависят от направления \mathbf{s}) при $\vec{B} \neq 0$ и изотропной при $\vec{B} = 0$.
2. В чисто электростатическом поле ($\vec{A} = 0$) при $U_0 = 0$ траектории частиц не зависят от заряда и массы. Если $U_0 \neq 0$ ($W_0 = U_0/e_0$), то траектория зависит от заряда.
3. В чисто электростатическом поле при $U_0 = 0$ **при увеличении потенциала во всех точках в k раз траектория не меняется.**
4. Пусть $\vec{A} \neq 0$ и $U_0 = 0$.
 - а) Траектории будут одинаковыми для частиц с одинаковым удельным зарядом $\eta = e_0/m_0$.
 - б) Если умножить U на k , а \vec{A} – на $k^{1/2}$ то форма траекторий не изменится, т.е. если выполняется условие подобия траекторий $U/B^2 = \mathbf{const}$, то траектория не изменится.

2.4. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Пусть есть система из двух параллельных сеток (см. рис. 3, сетки обозначены пунктиром) и длина сеток много больше расстояния между ними.

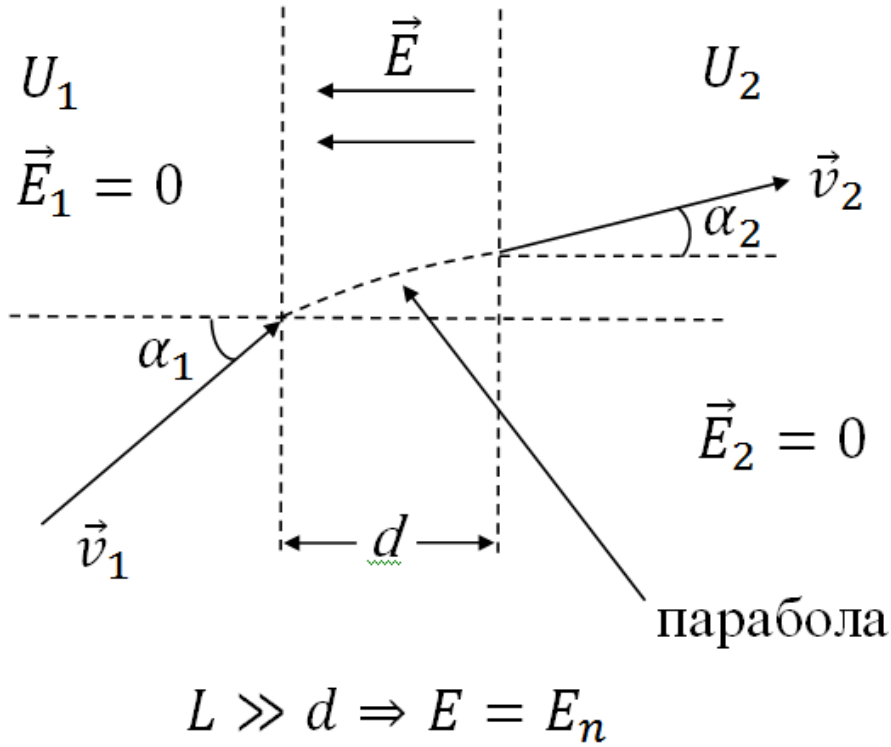


Рис.3. Система из двух длинных сеток и траектория электрона, влетающего в систему

Тогда поле между сетками чисто нормальное. Будем считать, что потенциалы сеток U_1 и U_2 , и к сетке 1 подлетает электрон под некоторым углом α_1 к нормали. Слева и справа от сеток $E = 0$, поэтому электрон летит по прямой, между сетками – по параболе, и далее – опять по прямой, наклоненной под углом α_2 . Тогда из закона сохранения энергии скорости электрона слева и справа от сеток

$$v_1 = \sqrt{2\eta U_1} \text{ и } v_2 = \sqrt{2\eta U_2}. \quad (40)$$

Поскольку тангенциальная компонента поля $E_\tau = 0$, то $v_\tau = const$, и следовательно

$$v_1 \times \sin \alpha_1 = v_2 \times \sin \alpha_2. \quad (41)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (42)$$

Т.е. мы получили закон Снеллиуса. Следовательно, мы можем считать, что система из двух длинных сеток – аналог границы раздела двух сред в оптике (см. рис. 4).

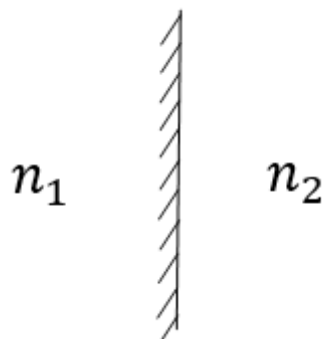


Рис.4. Граница раздела двух сред

Исходя из этой аналогии, можно предложить аналоги оптических линз в виде конфигураций сеток с приложенными к ним электрическими потенциалами (см. рис. 5).

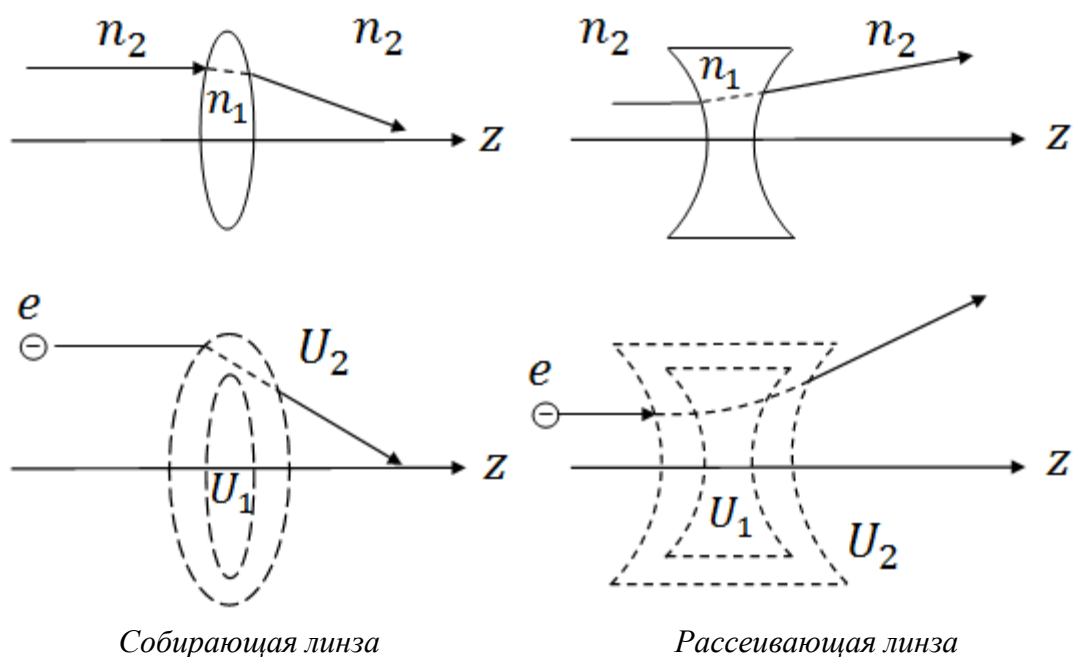


Рис.5. Собирающие и рассеивающие оптические линзы и их электронно-оптические аналоги

Но, оказалось, что эти линзы работают так, как не полированные (шероховатые) оптические линзы. Причина заключается в том, что около поверхности сетки на самом деле тангенциальная компонента поля отлична от нуля (рис. 6).

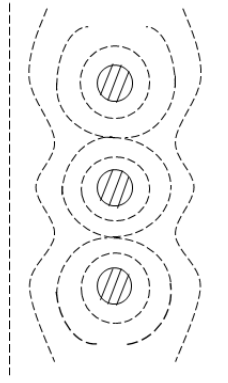


Рис.6. Форма эквипотенциалей (пунктир) вблизи прутиков сетки

Какие условия надо выполнить, чтобы сформировать электронно-оптическое изображение?

Очевидно, нужно обеспечить заданный закон изменения электронно-оптического коэффициента в пространстве:

$$n = n(\vec{r}).$$

А в электронике $n(\vec{r})$ определяется распределением электрического и магнитного полей. Поэтому нужное распределение можно сформировать магнитами или электродами, расположенными **вне области пролета электронов пучка** (рис. 7).

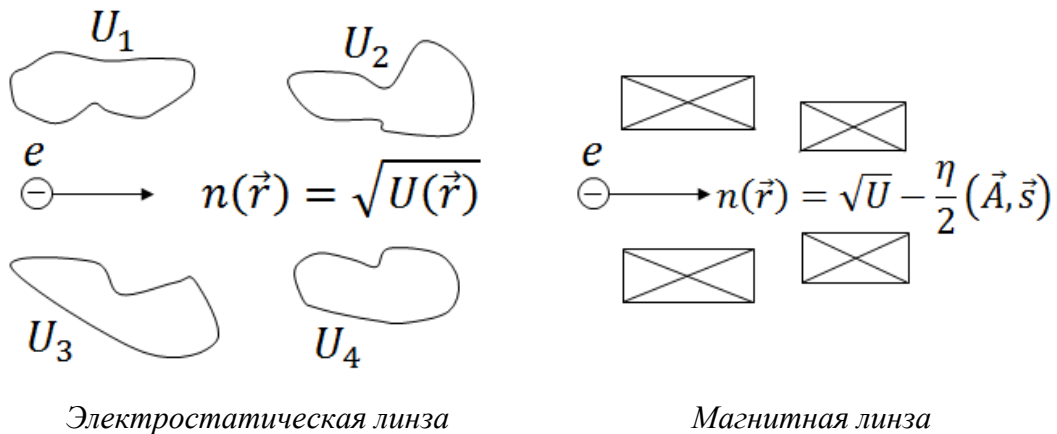


Рис.7. Принцип построения электронных линз

Что значит «получить изображение»?

Пусть у нас имеется плоскость предметов и плоскость изображений (рис. 8). Выберем на плоскости предметов две точки – A_1 и A_2 и будем считать, что все электронные траектории, выходящие из этих точек, собираются соответственно в точках B_1 и B_2 , как

показано на рисунке 8. Это свойство называется **СТИГМАТИЗМОМ**, а лучи – **гомоцентрическими**.

плоскость предметов

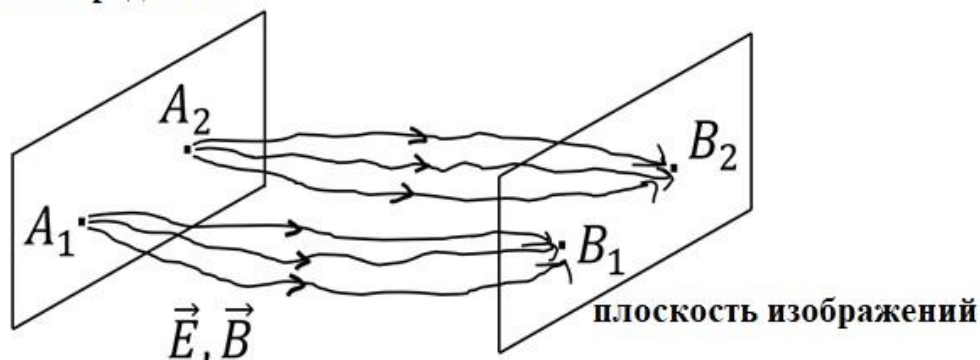


Рис.8. Гомоцентрические лучи

Кроме того, пусть выполняется свойство **подобия**:

$$A_1A_2 \sim B_1B_2.$$

Такое изображение называется **правильным**. Итак, для получения изображения надо обеспечить 2 условия – стигматизм и подобие. На рис. 9 показан вариант оптической линзы, для которой свойство стигматизма не выполнено – точка переходит в линию.

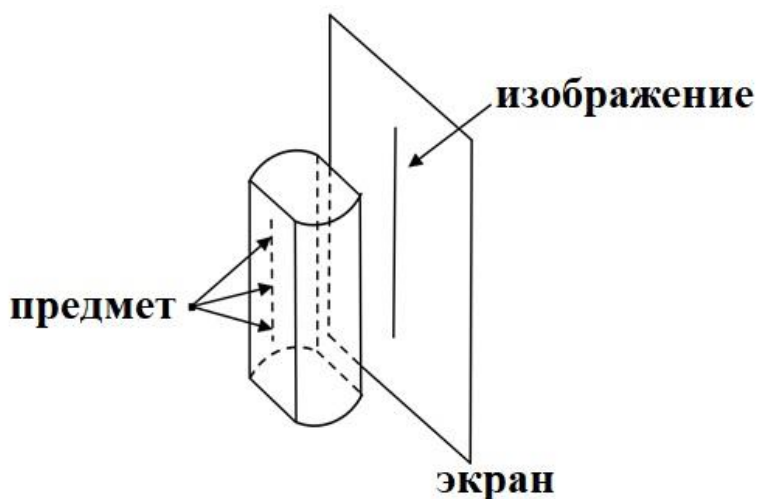


Рис.9. Пример линзы, где не выполнено свойство стигматизма

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЯХ

Наиболее простыми, с точки зрения, как изготовления, так и построения теории являются аксиально-симметричные линзы. Поэтому мы подробно рассмотрим именно этот класс электронных линз.

Будем дальше считать систему аксиально симметричной ($\partial/\partial\varphi = 0$) и считать тепловую энергию пренебрежимо малой, т.е. $U_0 = 0$ (реально $U_0 \sim 0.1$ В, в то время как $U \geq 100$ В). Тогда удобно пользоваться цилиндрической системой координат (см. рис. 10).

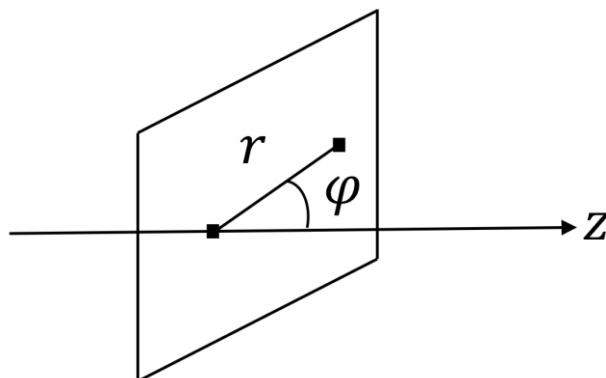


Рис.10. Цилиндрическая система координат

Будем также считать, что пучок слаботочный (для линз это предположение выполняется, т.к. типичные значения токов не превышают нескольких мА), тогда можно полагать, что электрическое поле пространственного заряда и плотность тока

$$\vec{E}_\rho = 0, \quad \vec{j} = 0.$$

Перепишем функционал (37) в виде

$$S_{э/о} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left[\sqrt{U} - \sqrt{\frac{\eta}{2}} (\vec{A}, \vec{s}) \right] dl \quad (43)$$

и преобразуем его к виду, когда независимой переменной является координата z . Рассмотрим окружность с центром на оси (см. рис. 11).

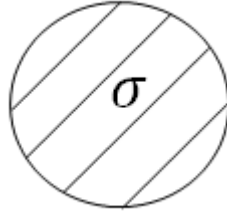


Рис.11. Контур циркуляции магнитного поля

И напишем для нее уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} = 0. \quad (44)$$

Проинтегрируем это уравнение по поверхности окружности, тогда

$$\int_S \text{rot}_n \vec{H} d\sigma = 0. \quad (45)$$

Применяя теорему Стокса к этому выражению, получаем

$$\oint H_l \times dl = \oint H_\varphi \times dl = H_\varphi \times l = 0. \quad (46)$$

Следовательно, азимутальные компоненты как электрического, так и магнитного поля равны нулю ($\partial/\partial\varphi = 0$):

$$H_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad E_\varphi = 0.$$

Напишем выражения для компонент магнитного поля через векторный потенциал:

$$B_r = \frac{1}{r} \times \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (47)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \times \left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \times \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}.$$

Как видно, обе компоненты поля полностью определяются азимутальной компонентой вектор-потенциала, поэтому можно положить, что

$$A_r = A_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = (0, A_\varphi, 0).$$

Возьмем элемент длины дуги:

$$d\vec{l} = (dr, r d\varphi, dz).$$

Введем производные

$$r' = \frac{dr}{dz},$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Тогда

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2} = dz \sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2}. \quad (48)$$

Поскольку вектор-потенциал имеет только одну компоненту, то

$$\vec{A} d\vec{l} = A_\varphi r d\varphi = A_\varphi r \varphi' dz. \quad (49)$$

Подставляя теперь все найденные величины в выражение (43) для функционала, получаем:

$$S_{\text{э/о}} = \int_{z_1}^{z_2} \underbrace{\left(\sqrt{U} \cdot \sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2} - \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cdot r A_\varphi \varphi' \right)}_F dz. \quad (50)$$

Поскольку независимой переменной является z , то решение, соответствующее экстремуму функционала, получим в виде

$$r = r(z), \varphi = \varphi(z).$$

Поскольку

$$A_\varphi = A_\varphi(r, z), \quad U = U(r, z),$$

то подынтегральная функция

$$F = F(r, z, r', \varphi'). \quad (51)$$

Условие экстремума функционала находится из уравнений Гаусса-Остроградского:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial r'} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения F , получаем, что с учетом $\partial F / \partial \varphi = 0$ первое уравнение преобразуется в

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = \frac{\sqrt{U} r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2}} - \sqrt{\frac{\eta}{2}} r A_\varphi = const, \quad (53)$$

а второе в

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\sqrt{U} r'}{\sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2}} \right) - \frac{\sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2}}{2\sqrt{U}} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} -$$

$$- \frac{\sqrt{U} r \varphi'^2}{\sqrt{1 + r'^2 + r^2 \varphi'^2}} + \sqrt{\frac{\eta}{2}} \varphi' \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = 0. \quad (54)$$

Пока наши уравнения полностью эквивалентны уравнениям Ньютона и не приспособлены для описания линз. Как известно из световой оптики, для получения изображения надо **диафрагмировать** пучок, т.е. пропустить только **близкие к оси лучи**. Такие пучки получили название **параксиальных**. Поэтому далее мы получим уравнения параксиальных траекторий. Параксиальными называются пучки, для которых выполнены два условия:

1. Малое расстояние траекторий Δr от оси системы

$$\Delta r \ll L_E, L_B$$

(здесь L_E, L_B — масштабы неоднородности соответственно электрического и магнитного полей).

2. Малые углы наклона траекторий к оси.

Запишем эти условия через неравенства.

Первое условие дает:

$|U(r, z) - U(0, z)| \ll U(0, z)$, тогда $U(r, z) \approx U(0, z) = U_z$

и

$|B_z(r, z) - B_z(0, z)| \ll B_z(0, z)$, тогда

$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z) = B_z. \quad (55)$$

Второе условие может быть выражено как

$$r' \ll 1, \quad r\varphi' \ll 1. \quad (56)$$

Найдем радиальную и продольную компоненты электрического поля

$$E_z = -\frac{dU(r, z)}{dz} \approx -\frac{dU(0, z)}{dz} = -\frac{dU_z}{dz} = -U_z'.$$

Поскольку $\rho = 0$, то поле подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Тогда при использовании цилиндрической системы координат:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (57)$$

следовательно,

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) \approx -E_z'(z)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = -rE_z'(z). \quad (58)$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$rE_r = -\frac{r^2}{2} E_z' + F(z). \quad (59)$$

Здесь $F(z)$ – произвольная функция, появляющаяся при интегрировании. Отсюда

$$E_r = -\frac{r^2}{2} E_z' + \frac{F(z)}{r}. \quad (60)$$

Поскольку при $r = 0$ $E_r = 0$, то $F(z) = 0$.
Значит, радиальная компонента поля

$$E_r = -\frac{r}{2} E_z', \quad (61)$$

а

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -E_r = \frac{r}{2} E_z' = -\frac{r}{2} U_z''. \quad (62)$$

В уравнения также входит слагаемое rA_φ .
Можно показать, что

$$\begin{aligned} rA_\varphi &= \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\int_S B_z(r, z) dS}{2\pi} = \frac{\int_S B_z(0, z) dS}{2\pi} = \\ &= \frac{B_z}{2\pi} \int dS = \frac{\pi r^2 B_z}{2\pi}. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь ψ – поток магнитного поля через окружность радиуса r .
Также в уравнения входит производная от этого выражения, легко вычислить, что

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) = rB_z. \quad (64)$$

Подставим теперь $\frac{\partial U}{\partial r}$, rA_φ , $\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$ в наши уравнения и учтем, что

$$r' \ll 1, \quad r\varphi' \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + r'^2 + r^2\varphi'^2} \approx 1. \quad (65)$$

Наконец, будем полагать, что

$$B_k = 0 \quad v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad const = 0.$$

Тогда первое уравнение приводится к виду

$$\sqrt{U_z} r^2 \varphi' - \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cdot \frac{r^2}{2} B_z = 0, \quad (66)$$

отсюда

$$\varphi' = \sqrt{\frac{\eta}{8U_z}} \cdot B_z. \quad (67)$$

Второе уравнение после аналогичных операций имеет вид:

$$\frac{d}{dz} (r' \sqrt{U_z}) + \frac{rU_z''}{4\sqrt{U_z}} - \sqrt{U_z} r \varphi'^2 + \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cdot \varphi' r B_z = 0. \quad (68)$$

Подставляя теперь угловую скорость из первого уравнения, получаем окончательно

$$\frac{d}{dz} (r' \sqrt{U_z}) + \frac{rU_z''}{4\sqrt{U_z}} + \frac{\eta B_z^2 r}{8\sqrt{U_z}} = 0. \quad (69)$$

Отметим, что правая часть первого уравнения не зависит от радиуса, поэтому первое уравнение описывает поворот изображения на некоторый угол, одинаковый для всех частиц. Следовательно, изображающие свойства линз определяются полностью вторым уравнением. Поскольку второе уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, то можно доказать, что **изображение** будет **стигматичным и подобным**.

3.1. УРАВНЕНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим **электростатические линзы**. Тогда $B_z = 0$, следовательно $\varphi' = 0$ и $\varphi = const$, т.е. **траектория – плоская**. Все свойства линз определяются уравнением

$$\frac{d}{dz} (\sqrt{U_z} r') + \frac{rU_z''}{4\sqrt{U_z}} = 0. \quad (70)$$

Первый вопрос, который возникает при анализе электростатических линз - **Каким свойством должно обладать электрическое поле, чтобы возникла линза?** Оказывается, **поле должно быть неоднородным**. Доказательство проведем методом от противного.

Пусть $E_z = const$, тогда $E_z = -U_z' = const$ и $U_z'' = 0$.

Тогда $\frac{d}{dz}(\sqrt{U_z}r') = 0$ и $\sqrt{U_z}r' = const.$

Очевидно, линза есть, если происходит изменение направления луча, запущенного параллельно оптической оси

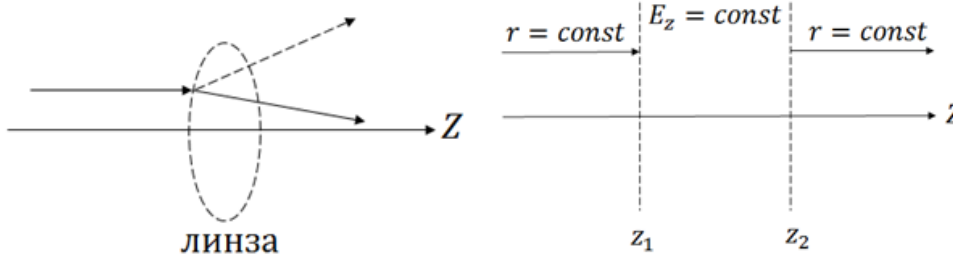


Рис.12. Изменение электронной траектории в линзе и схема линзы с однородным полем

Для области $z < z_1, r = const$, следовательно, $\sqrt{U_z}r' = 0$. Тогда и справа от линзы $z > z_2, \sqrt{U_z}r' = 0$. Но потенциал отличен от нуля, следовательно, $r = const$.

Таким образом, условие существования линзы $U_z'' \neq 0$.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЛИНЗ

Т.к. ход электронных траекторий в электростатической линзе полностью определяется уравнением (70), то поведение электронных траекторий полностью определяется осевым распределением потенциала $U_z(z)$.

Пусть есть линза (см. рис. 13), тогда, как было показано ранее:

$$\begin{aligned} U''_z &\neq 0, z \in [z_1, z_2], \\ U''_z &= 0, z \notin [z_1, z_2]. \end{aligned} \tag{71}$$

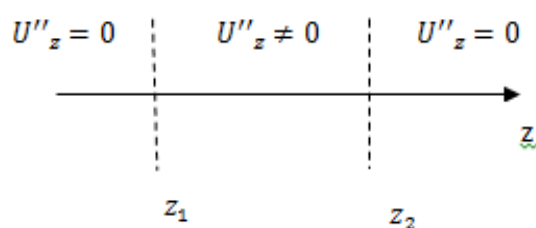


Рис.13. Схема электростатической линзы

Тогда вне линзы имеется две возможности: $E = 0$ или $E = const$. Поэтому все линзы делятся на следующие классы:

1. Линзы с ограниченной областью поля

В них слева и справа от линзы электрическое поле отсутствует. Они, в свою очередь, делятся на два подкласса – одиночные и иммерсионные. В одиночной линзе коэффициент преломления слева и справа от линзы одинаковый, а в иммерсионной линзе они различны.

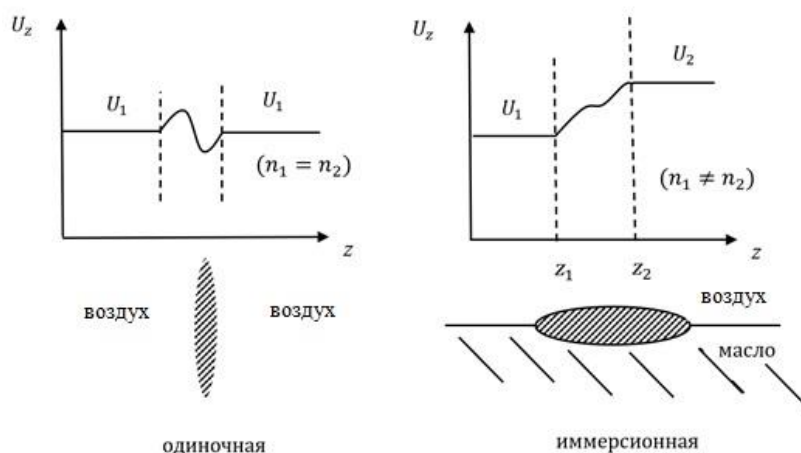


Рис.14. Осевое распределение потенциала и соответствующий оптический аналог для линзы с ограниченной областью поля

2. Линза – диафрагма

В этом случае слева и справа от линзы поле однородно (см. рис. 15).

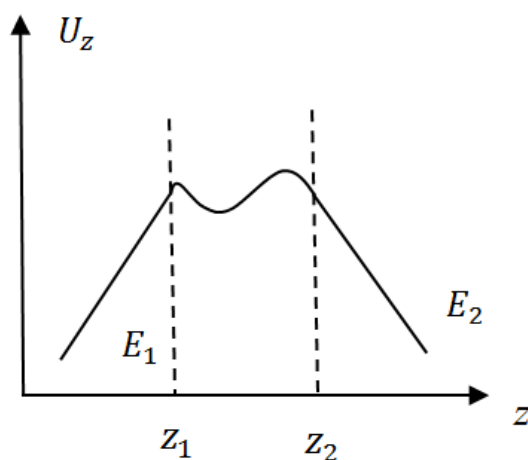


Рис.15. Распределение потенциала в линзе-диафрагме

3. Помимо этих двух классов линз отдельно выделяют третий, где линза включает катод, а поле неоднородно сразу от поверхности катода. Такая линза называется **иммерсионный объектив**. В ней электроны сразу попадают в неоднородное поле (см. рис. 16).

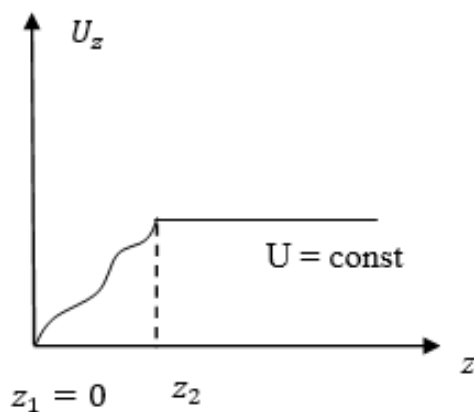
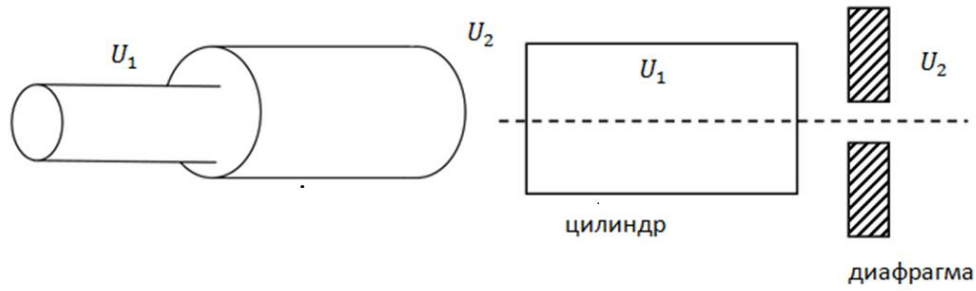


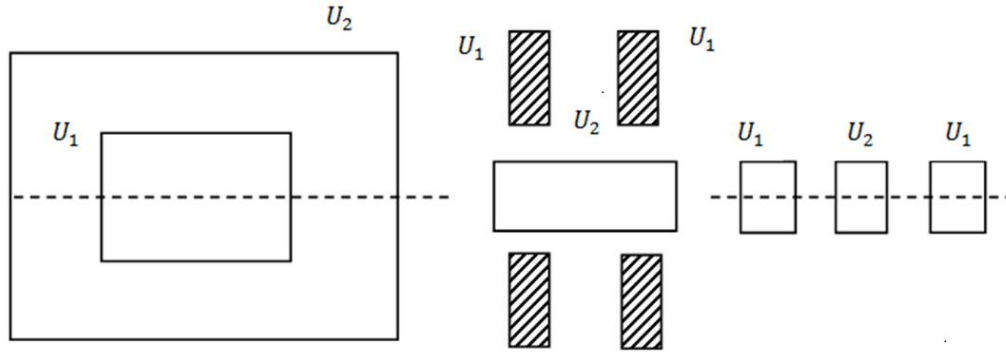
Рис.16. Иммерсионный объектив ($z_1=0$ плоскость катода)

4.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЗЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ПОЛЯ

На рис. 17 показаны примеры линз с ограниченной областью поля.



иммерсионные линзы



одиночные линзы

Рис.17. Устройство линз с ограниченной областью поля

Все линзы с ограниченной областью поля – собирающие. Докажем это утверждение.

В уравнении параксиальных траекторий (70) сделаем замену переменных:

$$R(z) = r(z)\sqrt[4]{U_z}. \quad (71)$$

Тогда уравнение сводится к следующему виду:

$$\frac{d^2R}{dz^2} + \frac{3}{16} \left(\frac{U'}{U} \right)^2 R = 0, \quad (72)$$

откуда легко видеть, что функция $R(z)$ выпукла вверх - $R'' < 0$.

Запустим луч параллельно оптической оси (см. рис. 18), тогда для $z < z_1$ $r(z) = const$, но $U_1 = const$, поэтому $R(z) = r(z)\sqrt{U_1} = const$. В линзе $R'' < 0$, поэтому функция R выпукла вверх. Справа от линзы (при $z > z_2$) $U_2 = const$, поэтому $r(z)$ – прямая. Но поскольку $R(z) = \sqrt{U_2} r(z)$, то $R(z)$ – тоже

прямая, причем наклоненная к оси (в линзе $R'' < 0$), следовательно, существует точка, где $R(z) = 0$. Но поскольку функции связаны линейно, то и $r(z) = 0$ в той же точке. Таким образом, мы доказали, что линза – собирающая.

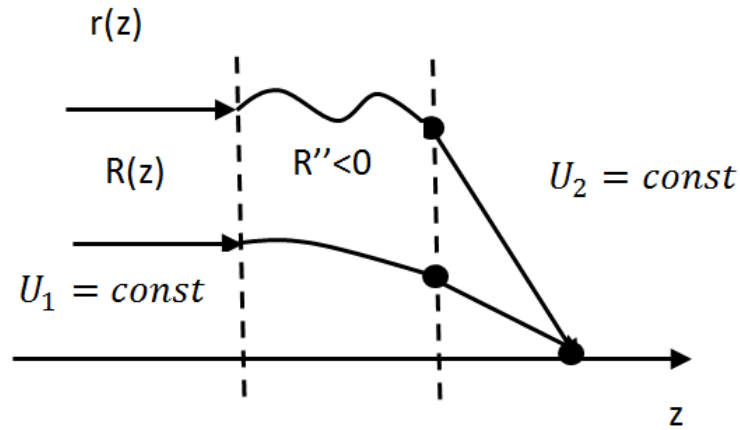


Рис.18. Поведение функций $R(z)$ и $r(z)$ вне и внутри линзы (границы линзы z_1, z_2 отмечены пунктиром)

Поясним на простом физическом примере, почему линза с ограниченной областью поля является собирающей. Рассмотрим линзу из двух одинаковых цилиндров с потенциалами U_1, U_2 ($U_2 > U_1$).

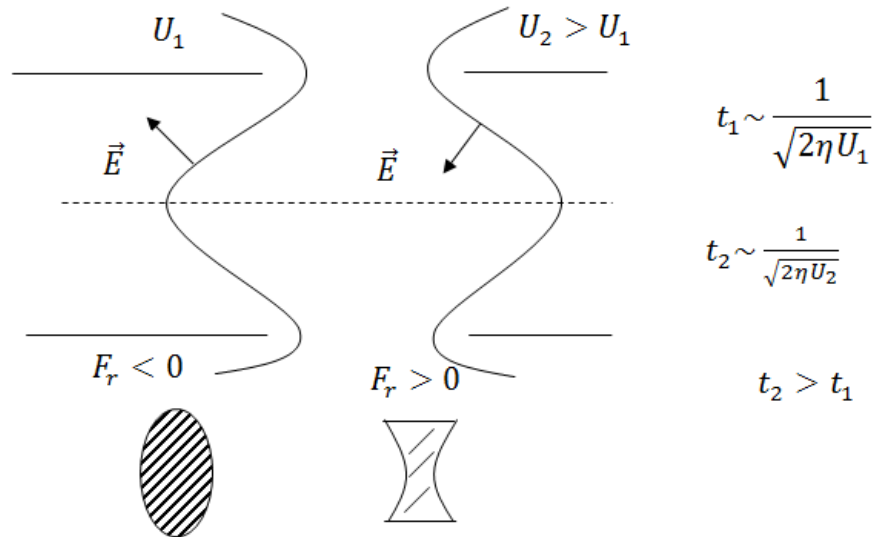


Рис.19. Эквипотенциальные линии цилиндрической линзы с потенциалами U_1, U_2 .

Качественная картина эквипотенциалей приведена на рис. 19. Как известно, электрическое поле направлено по нормали к

эквипотенциалам. Тогда в левой части линзы радиальная компонента силы, действующей на электрон, отрицательна, в правой – положительна. Таким образом, левая часть эквивалентна собирающей линзе, правая – рассеивающей. Какая линза «победит»? Для этого надо сравнить времена пролета электрона через собирающую t_1 и рассеивающую t_2 области. Очевидно, эти времена обратно пропорциональны скоростям электронов:

$$t_1 \sim \frac{1}{\sqrt{2\eta U_1}},$$

$$t_2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\eta U_2}}. \quad (73)$$

Поскольку в первой области скорость меньше, то время ее пролета больше, и в целом превалирует действие собирающей линзы.

4.2. РАСЧЕТ ТОНКОЙ ИММЕРСИОННОЙ ЛИНЗЫ

Пусть у нас имеется иммерсионная линза, границы линзы – плоскости z_1 и z_2 . Пустим электрон на расстоянии r_0 от оси параллельно оптической оси (см. рис. 20). Тогда внутри линзы электронный луч сместится на величину Δr .

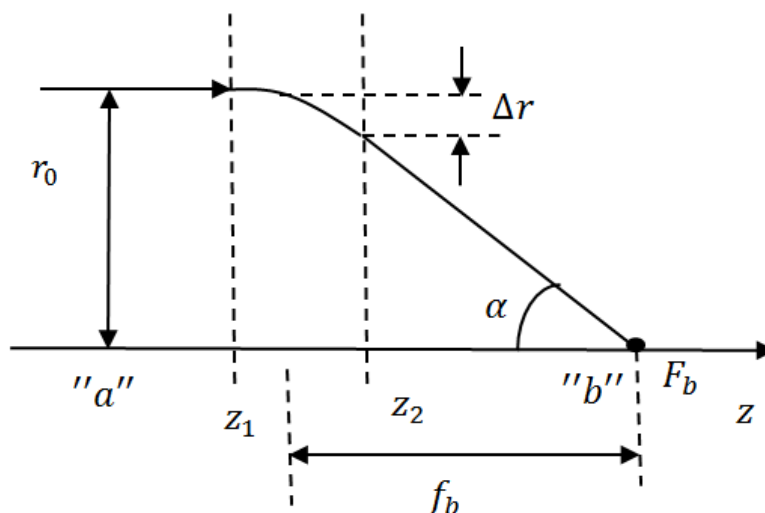


Рис.20. Прохождение электронного луча через иммерсионную линзу

Линза называется тонкой, если величина смещения

$$\Delta r \ll r_0. \quad (74)$$

Можно показать, что это условие эквивалентно условию, что толщина линзы много меньше фокусного расстояния (см. также ниже).

$$|z_2 - z_1| \ll f_b \quad (75)$$

В этом случае фокусное расстояние можно отсчитывать как от середины линзы до точки фокуса, так и от правого края до точки фокуса.

Вспомним, как в оптике строится изображение. Если у нас есть предмет AA' , то надо провести два главных луча: один параллельно оптической оси до линзы и далее через фокус пространства изображений, другой через фокус пространства предметов до пересечения с линзой и далее параллельно оптической оси. Пересечение этих двух лучей даст нам изображение.

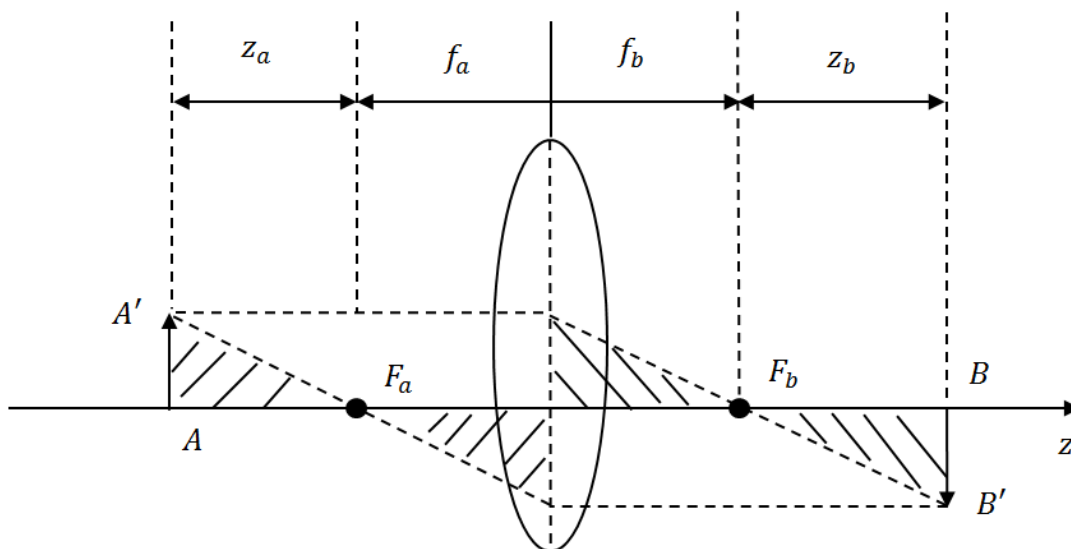


Рис.21. Построение изображения в линзе

Тогда из подобия заштрихованных разной штриховкой треугольников получаем

$$\frac{AA'}{f_b} = \frac{BB'}{z_b} \quad \text{и} \quad \frac{AA'}{z_a} = \frac{BB'}{f_a}.$$

Увеличение линзы:

$$M = \frac{BB'}{AA'} = \frac{z_b}{f_b} = \frac{f_a}{z_a}. \quad (76)$$

Отсюда получаем так называемое соотношение Ньютона:

$$z_a z_b = f_a f_b. \quad (77)$$

Таким образом, для построения изображения в линзе необходимо знать фокусные расстояния. Найдем их. Для этого проинтегрируем уравнение параксиальных траекторий (70) по области линзы:

$$\int_{z_1}^{z_2} d\left(\sqrt{U_z} \frac{dr}{dz}\right) = -\frac{1}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r U_z''}{\sqrt{U_z}} dz. \quad (78)$$

Учтем, что линза тонкая, т.е. радиус электрона не меняется внутри линзы, тогда:

$$\int_{z_1}^{z_2} d\left(\sqrt{U_z} \frac{dr}{dz}\right) = -\frac{r_0}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_z''}{\sqrt{U_z}} dz. \quad (79)$$

Слева получаем подстановку

$$\sqrt{U_z} \frac{dr}{dz} \Big|_{z_1}^{z_2} = -\frac{r_0}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_z''}{\sqrt{U_z}} dz. \quad (80)$$

Как следует из условия задачи (см. рис. 20),

$$\frac{dr}{dz} \Big|_{z_1} = 0, \quad \frac{dr}{dz} \Big|_{z_2} = -tg\alpha, \quad tg\alpha = \frac{r_0}{f_b}.$$

подставляя теперь эти значения в формулу (80), окончательно получаем

$$\frac{1}{f_b} = \frac{1}{4\sqrt{U_b}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_z''}{\sqrt{U_z}} dz \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f_a} = \frac{1}{4\sqrt{U_a}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_z''}{\sqrt{U_z}} dz. \quad (81)$$

Как правило, осевое распределение потенциала получается в результате численного расчета и известно в конечном числе точек в виде таблицы (см. рис. 22). В то же время в интегралы входит вторая производная потенциала. Поэтому при численном дифференцировании будет вноситься значительная погрешность, и приведенные формулы неудобны при численном расчете.

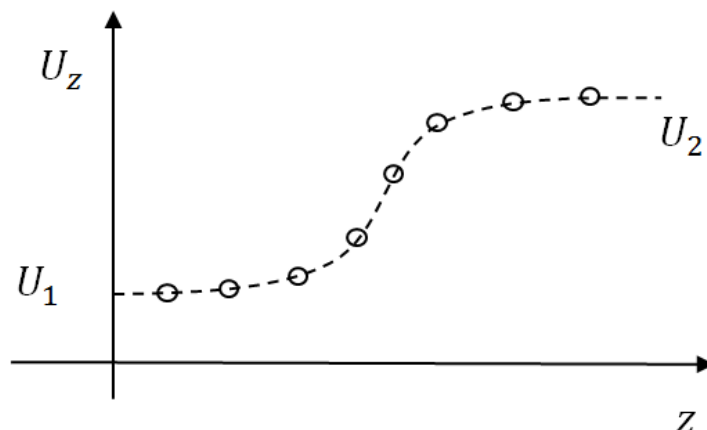


Рис.22. Точки в которых известно значение потенциала в линзе

Порядок входящих в формулу (81) производных можно понизить, если учесть, что вне линзы вторая производная равна нулю, а электрическое поле обращается в ноль на краях линзы:

$$z \notin [z_1, z_2], \quad U_z'' = 0, \quad U_z'|_{z_1, z_2} = 0.$$

Тогда, заменяя интеграл на несобственный и проводя интегрирование по частям, можно показать, что

$$\frac{1}{f_{a,b}} = \frac{1}{8\sqrt{U_{a,b}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_z'^2}{U_z^{\frac{3}{2}}} dz. \quad (82)$$

Из последней формулы следует также, что отношение фокусных расстояний

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{\sqrt{U_a}}{\sqrt{U_b}} = \frac{n_a}{n_b}. \quad (83)$$

4.3. ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ ИММЕРСИОННЫХ ЛИНЗ

Сильной называется иммерсионная линза, в которой луч сильно меняет свое радиальное положение внутри линзы, т.е. выполнены условия

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &\sim f_b, \\ \Delta r &\approx r_0. \end{aligned} \quad (84)$$

В этом случае старое определение фокусного расстояния становится некорректным, меняется также метод построения изображения в линзе.

Пусть есть линза (см. рис. 23). Рассмотрим семейство лучей, параллельных оптической оси.

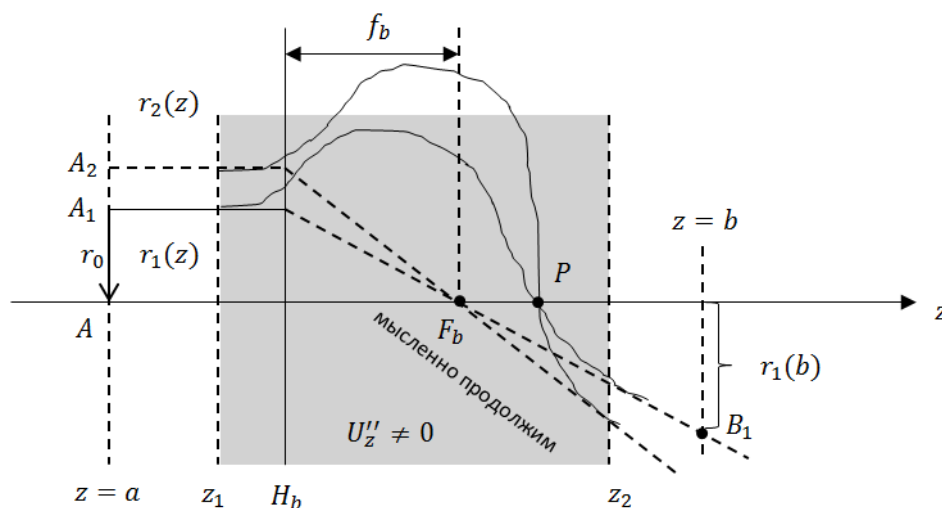


Рис.23. Сильная иммерсионная линза

Пусть луч $r_1(z)$ выходит из точки A_1 . Внутри линзы этот луч идет по какой-то сложной траектории, пересекает ось в точке P , далее выходит из линзы и превращается в прямую линию (поле вне линзы отсутствует). Тогда всё семейство лучей параллельных оптической оси описывается соотношением

$$r(z) = Cr_1(z). \quad (85)$$

Тогда для луча, выходящего из точки A_2 , будем иметь

$$\begin{aligned} r_2(z) &= C_2 r_1(z), \\ r_2'(z) &= C_2 r_1'(z), \end{aligned} \quad (86)$$

где

$$C_2 = \frac{AA_2}{AA_1}. \quad (87)$$

Применим эти соотношения для плоскостей предмета и изображения, тогда

$$r_2(b) = C_2 r_1(a), \quad (88a)$$

$$r_2(a) = C_2 r_1(b), \quad (88b)$$

$$r'_2(b) = C_2 r'_1(c). \quad (88c)$$

Поделим (88a) на (88c) и (88b) на (88c):

$$\frac{r_2(b)}{r'_2(b)} = \frac{r_1(b)}{r'_1(b)} \quad (89)$$

$$\frac{r_2(a)}{r'_2(b)} = \frac{r_1(a)}{r'_1(a)}$$

Теперь продолжим обратно лучи из пространства предметов (пунктир на рис. 23) Тогда из треугольника видно, что все обратные продолжения лучей пересекутся с осью в одной и той же точке. Эта точка и называется **фокусом пространства изображений (F_b)**. Если теперь продолжить лучи из пространства предметов и обратные продолжения лучей из пространства изображений, то из 2-го соотношения видно, что они пересекутся **в одной и той же плоскости**. Эта плоскость называется **главной плоскостью пространства изображений**. Фокусным расстоянием называется

$$f_b = z_{H_b} - z_{F_b}, \quad (90)$$

$r_1(z)$ – **1-й главный луч**. Аналогично, если мы запустим луч параллельно оптической оси из пространства изображений, то такой луч называется **вторым главным лучом**. И тогда мы можем провести аналогичные построения и получить еще один фокус и еще одну главную плоскость.

Параметры H_a, H_b, F_a, F_b называются **кардинальными элементами линзы**. Зачем нужны эти элементы? Если они нам известны, то исходя из проведенных выше рассуждений и определений, легко построить ход лучей вне линзы, а значит построить изображение.

4.4. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ТОЛСТОЙ ЛИНЗЕ

Пусть нам известно положение точек фокусов и главных плоскостей, и перед линзой стоит предмет AA' (см. рис. 24). Проведем 2 главных луча. Тогда первый главный луч пойдет параллельно оптической оси до пересечения с главной плоскостью, а дальше по прямой через точку фокуса. Вторым главным луч наоборот проведем

по прямой через точку фокуса до пресечения с главной плоскостью, а далее – параллельно оптической оси.

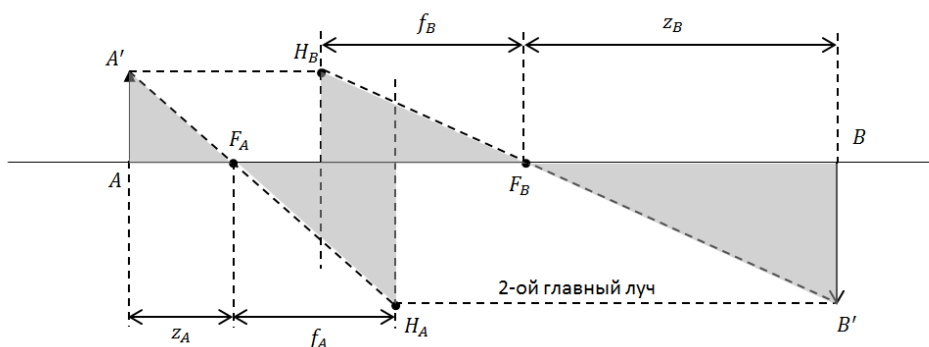


Рис.24. Построение изображения в толстой линзе

Тогда т.к. треугольники подобны

$$M = \frac{f_a}{z_a} = \frac{z_b}{f_b}$$

и опять получаем соотношение Ньютона

$$z_a z_b = f_a f_b. \quad (91)$$

Но здесь уже фокусные расстояния другие – в теории толстых линз **фокусное расстояние** – расстояние от фокуса до **главной плоскости**, а не до середины линзы, как в тонких.

4.5. ЛИНЗЫ-ДИАФРАГМЫ

По классификации линз имеем распределение потенциала, показанное на рис. 25.

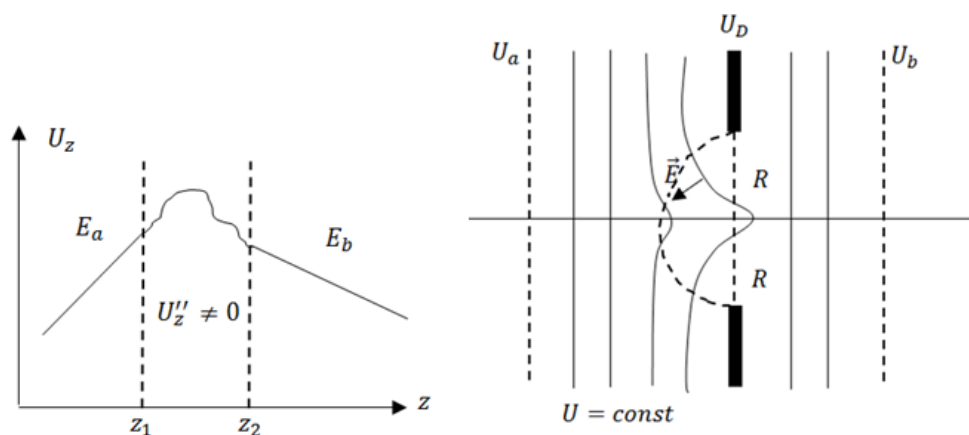


Рис.25. Распределение потенциала в линзе-диафрагме (слева) и конструкция линзы (справа)

Конструктивно такая линза представляет собой две сетки с потенциалами U_a и U_b , между которыми расположена диафрагма с отверстием, имеющая потенциал U_d .

С точки зрения качественной картины распределения потенциала возможно два случая:

1. Потенциал меняется монотонно от левой сетки к правой, т.е.

$$U_a < U_d < U_b.$$

Рассмотрим подробно сначала этот случай. Закроем (заметаллизируем) отверстие в диафрагме. Тогда слева и справа от диафрагмы мы получаем два плоских конденсатора с электрическими полями:

$$E_a = -\frac{U_D - U_a}{d_a},$$

$$E_b = -\frac{U_b - U_D}{d_b}.$$
(92)

А эквипотенциальные поверхности будут плоскостями, параллельными сеткам. Теперь откроем отверстие в диафрагме. Очевидно, произойдет возмущение электрического поля вблизи отверстия диафрагмы, причем масштаб этого возмущения будет порядка диаметра диафрагмы $2R$. Соответственно, искажутся и эквипотенциальные поверхности внутри этой области. Будем считать дальше для определенности, что $E_a > E_b$, тогда эквипотенциали выгнутся в область более слабого поля (см. рис. 25). Поскольку электрическое поле перпендикулярно эквипотенциали, то радиальная компонента силы $F_r > 0$ и линза будет рассеивающей.

2. Теперь рассмотрим случай немонотонного распределения потенциала, т.е.

$$U_a < U_d,$$

$$U_b < U_d.$$

Тогда очевидно, что где-то вблизи плоскости диафрагмы при $z = z_c$ осевое распределение потенциала имеет максимум (см. рис. 26).

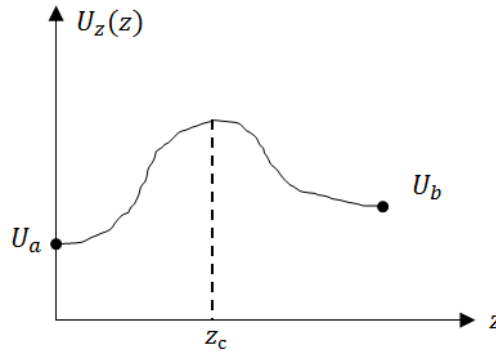


Рис.26. Качественная картина распределения потенциала в линзе-диафрагме

В точке максимума, как известно,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=z_c} = 0,$$

следовательно, компонента

$$E_z(0, z_c) = 0.$$

Но для аксиально симметричной системы радиальная компонента

$$E_r(0, z) = 0,$$

и, в частности, в точке $z = z_c$:

$$E_r(0, z_c) = 0.$$

Таким образом, в точке z_c обе компоненты поля обращаются в ноль. Поскольку С – точка максимума, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} < 0.$$

Но распределение потенциала подчиняется уравнению Лапласа, которое в цилиндрической системе координат для случая аксиальной симметрии принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (93)$$

Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial r} + r \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0.$$

Поскольку на оси системы

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \text{то} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0.$$

Таким образом, суммируя все вышесказанное, в точке С

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} < 0. \quad (94)$$

Следовательно, точка С – седловая и картина силовых линий выглядит так, как показано на рис. 27.

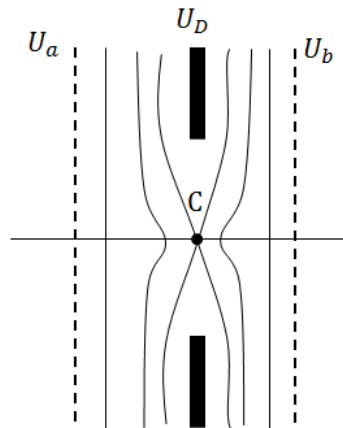


Рис.27. Картина силовых линий в линзе-диафрагме в случае немонотонного распределения потенциала

4.6. ФОКУСНОЕ РАССТОЯНИЕ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ-ДИАФРАГМЫ

Как и в случае иммерсионной линзы, линза-диафрагма считается тонкой, если

$$\Delta r \ll r_0$$

или, что то же самое $|z_2 - z_1| \ll f_b$.

В линзе-диафрагме поле вне линзы однородное, поэтому если мы запустим электронный луч из пространства предметов

параллельно оптической оси на расстоянии r_0 от оси (рис. 28), то за линзой электрон будет двигаться по параболе и пересечет ось в некоторой точке Р. Если мы теперь рассмотрим луч большего радиуса, то за линзой он также будет двигаться по параболе, но пересечет ось в другой точке. Таким образом, старое определение точки фокуса оказывается некорректным, и необходимо дать новое определение, обобщающее старое. Поэтому для линзы-диафрагмы принято, что точкой фокуса называется точка, в которой касательная к траектории, проведенная в точке выхода из линзы, пересекается с осью. Легко увидеть, что это определение годится и для иммерсионной линзы тоже, поскольку там касательная совпадает с самой траекторией.

Найдем теперь фокусное расстояние аналогично тому, как мы это делали для иммерсионной линзы.

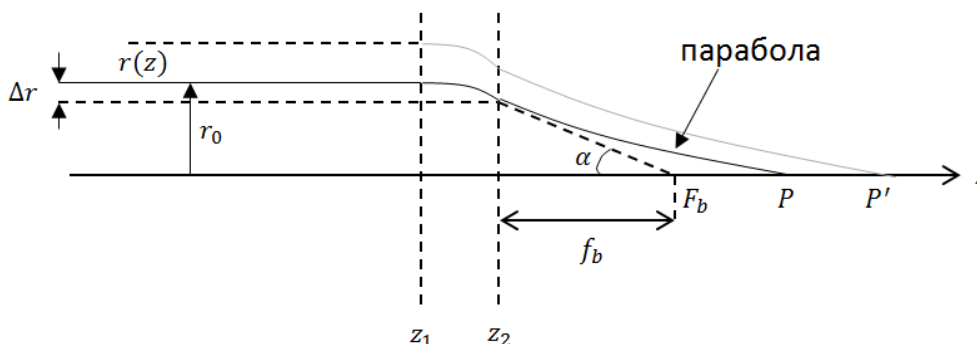


Рис.28. Электронный луч в линзе-диафрагме

Проинтегрируем уравнение параксиальных траекторий (70) по области линзы, тогда имеем

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_z} \frac{dr}{dz} \right) dz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{r U_z''}{4 \sqrt{U_z}} dz. \quad (95)$$

Поскольку линза тонкая, можно считать $r = r_0$ и пренебречь изменением потенциала внутри линзы, считая, что он остается близким к потенциалу диафрагмы, т.е. в правой и левой частях последнего уравнения полагать $\sqrt{U_z} \approx \sqrt{U_D}$. Тогда получаем следующую подстановку:

$$U_D \frac{dr}{dz} \Big|_{z_1}^{z_2} = - \frac{r_0}{4} U_z' \Big|_{z_1}^{z_2} \quad (96)$$

поскольку мы запускаем луч параллельно оптической оси, то (см. рис. 28)

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_1} = 0, \quad \left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_2} = -tg(\alpha) = -\frac{r_0}{f_b}.$$

Подставляя эти значения получаем

$$U_D \left(-\frac{r_0}{f_b} \right) = \frac{r_0}{4} E_z \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0}{4} (E_b - E_a). \quad (97)$$

И окончательно

$$f_b = \frac{4U_D}{E_a - E_b},$$

где

$$(98)$$

$$E_a = \frac{U_a - U_D}{d_a}, \quad E_b = \frac{U_D - U_b}{d_b}.$$

Из последнего выражения видно, что линза может быть, как собирающей, так и рассеивающей.

4.7. АНОДНОЕ ОТВЕРСТИЕ КАК РАССЕИВАЮЩАЯ ЛИНЗА-ДИАФРАГМА

Пусть у нас есть диод с каналом транспортировки пучка (рис. 29), и нам надо сформировать цилиндрический сплошной пучок, проходящий сквозь канал. Такие задачи очень часто возникают при разработке источников электромагнитного излучения с черенковским механизмом излучения электронов. Тогда, казалось бы, надо нагреть часть катода (серая заливка на рис. 29) до некоторой температуры T , тогда вследствие явления термоэлектронной эмиссии с этой части катода начнут выходить электроны, проходить в канал и таким образом мы сформируем требуемый электронный пучок. Но оказывается, если канал очень длинный, то практически все частицы осядут на стенки канала, и ток на выходе $I \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$ (L – длина канала). Рассмотрим распределение потенциала в линзе (правое изображение на рис. 29). Легко увидеть, что вблизи катода электрическое поле однородно (потенциал меняется линейно), дальше идет участок неоднородного поля, а за входом в канал поле равно нулю (потенциал постоянен). Таким образом, мы имеем частный случай линзы-диафрагмы.

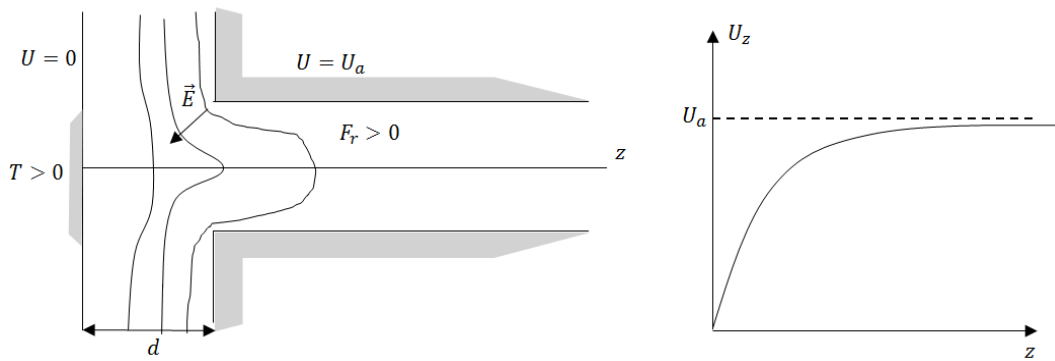


Рис.29. Схематическое изображение диода с каналом транспортировки пучка (слева) и распределение потенциала в такой системе (справа)

Сосчитаем фокусное расстояние линзы. Из общей формулы получаем, что фокусное расстояние

$$f = \frac{4U_a}{-\frac{U_a}{d}} = -4d, \quad (99)$$

т.е. такая линза – рассеивающая. Этот же вывод можно сделать, рассматривая картину эквипотенциалей и направление вектора электрического поля. Как видно, существует радиальная компонента силы, уводящая электрон от оси. Для компенсации этого эффекта над каналом транспортировки устанавливают соленоид, создающий достаточно сильное однородное магнитное поле. Тогда при сильном поле шаг и радиус электрона будут малы, т.е. выполняются условия адиабатического приближения, и электрон будет двигаться вдоль магнитной силовой линии параллельно оси системы, не попадая на стенки канала.

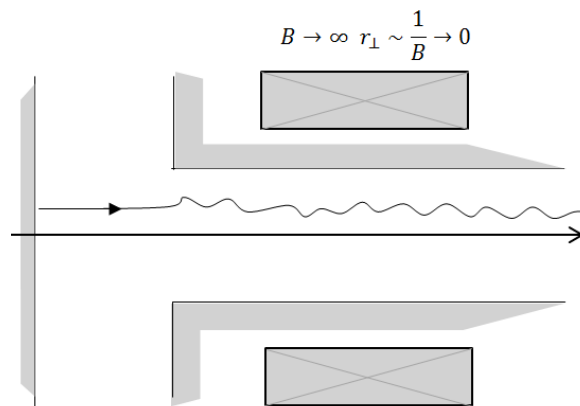


Рис.30. Транспортировка электронного пучка вдоль оси канала

4.8. ИММЕРСИОННЫЙ ОБЪЕКТИВ

Иммерсионный объектив состоит из цилиндрического торцевого катода с подогревателем, фокусирующего электрода-модулятора с потенциалом $U_m < 0$ и анода (см. рис. 31 (слева)). Размеры отверстия в модуляторе $2R$ и его расстояние d от катода выбраны так, что $d \sim 2R$. В этом случае сразу начиная от катода поле будет неоднородным, и в соответствии с приведенной выше классификацией электростатических линз мы получаем случай иммерсионного объектива. Очевидно, что осевое распределение потенциала немонотонно и имеет минимум в области около среза модулятора (см. рис. 32). Т.е. этот случай полностью аналогичен рассмотренному выше режиму работы линзы-диафрагмы в случае $U_a < U_D, U_b > U_D$. Поэтому, как и в случае линзы-диафрагмы, в такой системе будет иметься седловая точка электрического поля (см. рис.31 (справа)). Как показывают расчеты, по мере уменьшения модуля U_m седловая точка двигается к катоду и в конце концов, садится на катод, как показано на рисунке 31.

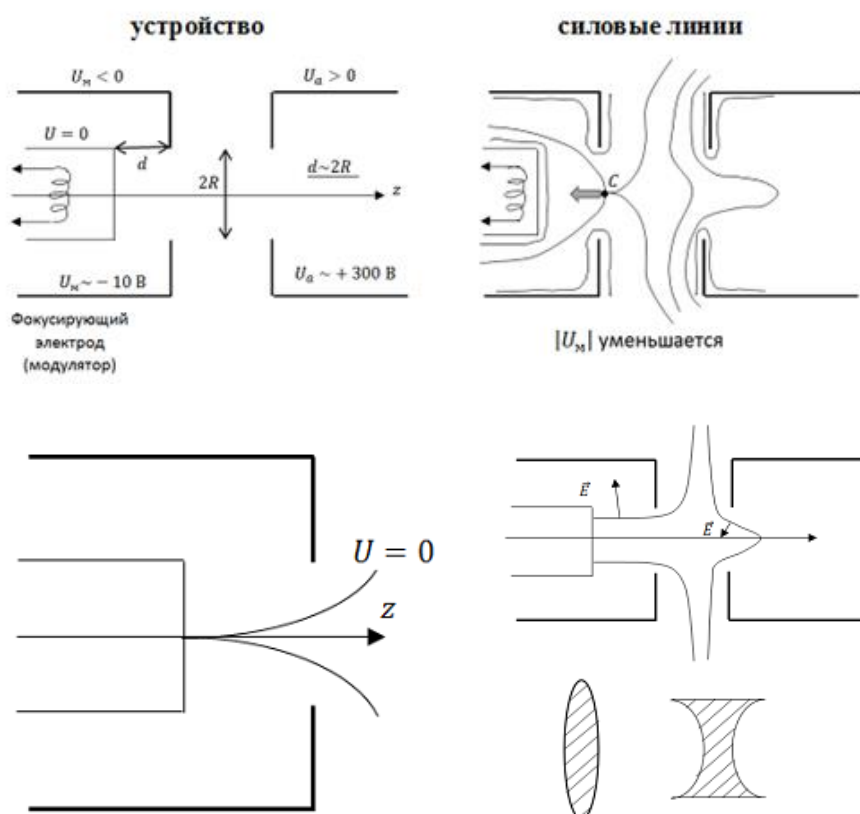


Рис.31. Устройство и картина силовых линий иммерсионного объектива. Трансформация вида нулевой эквипотенциали по мере уменьшения потенциала модулятора

Если после этого продолжить уменьшать $|U_m|$, то дальше нулевая эквипотенциаль расщепляется на две, и они начинают расходиться от оси симметрии. При этом между нулевыми эквипотенциальными возникает ускоряющее электроны электрическое поле. Учитывая, что катод нагрет, мы получаем, что изменение $|U_m|$ приводит к изменению площади термоэлектронной эмиссии и таким образом к изменению тока. Из вида эквипотенциальных поверхностей следует, что в левой части линзы поле направлено от оси, а в правой – к оси. Следовательно, левая часть системы работает как собирающая линза, а правая – как рассеивающая.

Какая линза сильнее? Очевидно, рассуждать можно так же, как при анализе иммерсионной линзы. Поскольку в области модулятора потенциал существенно ниже, чем в области анода, то время пролета собирающей линзы больше, чем рассеивающей. Поэтому в целом иммерсионный объектив является собирающей линзой.

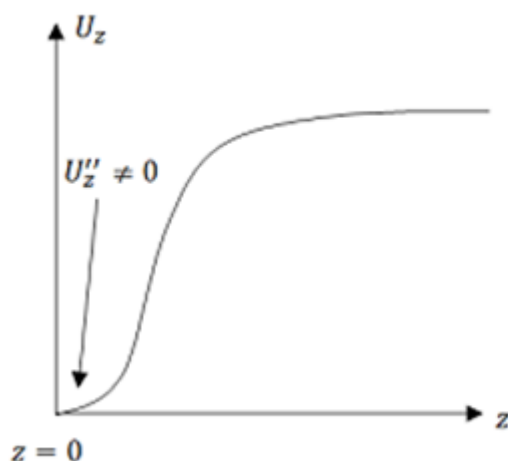


Рис. 32. Осевое распределение потенциала в иммерсионном объективе

4.9. ПРОЖЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫХ ТРУБОК

Свойство изменения тока пучка путем изменения потенциала модулятора используется в электронно-лучевых трубках, устройство которых схематично представлено на рис. 33. Здесь для формирования пятна на экране используется система из двух линз – иммерсионной и иммерсионного объектива. Поскольку свечение экрана прямо пропорционально току пучка I , то меняя U_m можно менять яркость. Размер пятна на экране должен быть минимальным, поэтому система линз формирует на экране уменьшенное изображение кроссовера – области минимального сечения пучка, возникающего справа от модулятора.

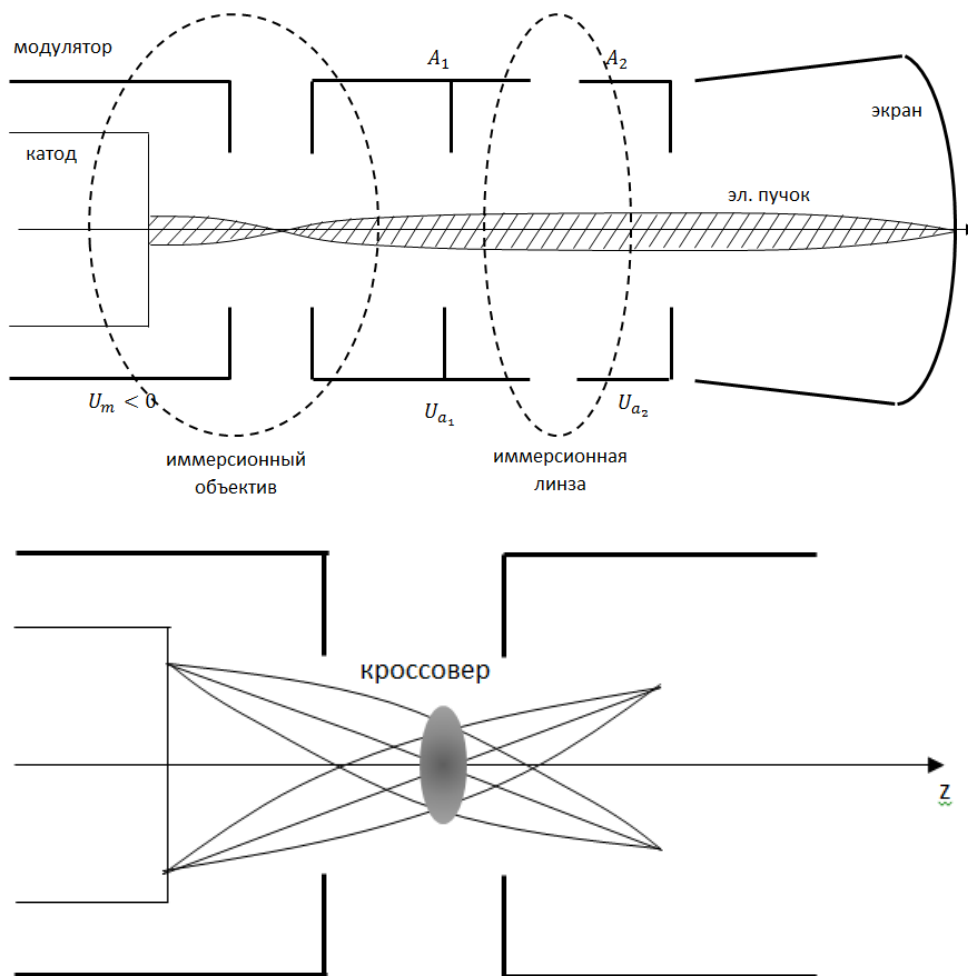


Рис.33. Устройство электронно-лучевой трубки.

4.10. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Пусть имеется иммерсионный объектив, за которым стоит система из двух уменьшающих линз (показанная на рис. 34), дающих уменьшенное изображение кроссовера.

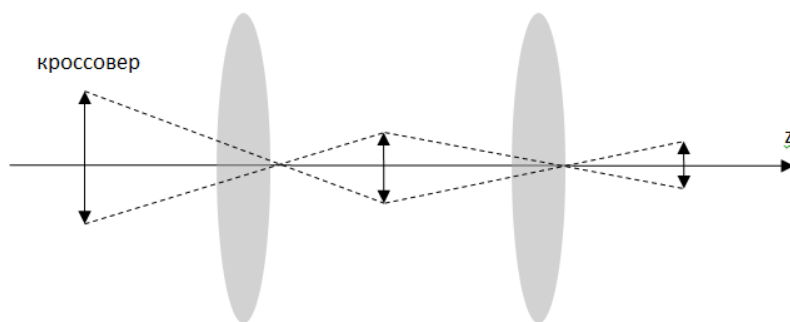


Рис.34. Система из двух уменьшающих линз

Рассмотрим в качестве примера случай весьма умеренных напряжений и токов: $I = 1$ мА, $U = 50$ кВ. Тогда мощность пучка P всего лишь 50 Вт. Изображение кроссовера можно сфокусировать в пятно радиусом порядка 1 микрона. Оценим плотность мощности на мишени

$$P_{\text{уд}} = \frac{P}{S} = \frac{50 \text{ Вт}}{3.14 * (10^{-4})^2 \text{ см}^2} \approx 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}. \quad (100)$$

Таким образом, несмотря на малую мощность пучка, его можно использовать для локальной плавки металла или в общем случае - твердого тела. На основе этого подхода можно организовать множество различных технологических процессов: плавление, сварка, термообработка ограниченных зон, сверление, микрофрезерование, переплав поверхностных слоев, гравировка, пайка, напыление, стерилизация и активация поверхностей материалов, запись информации (в том числе голограмм), электронная литография, для получения СБИС, производство многослойных структур и многое другое.

5. МАГНИТНЫЕ ЛИНЗЫ

Если мы будем сравнивать между собой электростатические и магнитные линзы, то окажется, что электростатические обладают рядом недостатков

1. Необходимо размещать элементы линзы в вакууме;
2. Трудно работать с пучками больших энергий – возрастает риск пробоя;
3. Малая оптическая сила $1/f$ по сравнению с магнитными линзами.

Поэтому далее будут рассмотрены магнитные линзы.

5.1. УРАВНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Полагая в общих уравнениях линз (67) - (69)

$$U_z = \text{const} = U, \quad U_z'' = 0,$$

получаем

$$\varphi' = \sqrt{\frac{\eta}{8U}} B_z, \quad (101)$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\eta B_z^2 r}{8U} = 0. \quad (102)$$

Как уже отмечалось, первое уравнение описывает поворот изображения как целого, поэтому все свойства линз определяются вторым уравнением. Уже просто из общего вида уравнения легко сделать следующие выводы о свойствах магнитных линз:

1. Любое магнитное поле обладает линзовым действием;
2. Вторая производная $\frac{d^2 r}{dz^2} < 0$, следовательно, магнитные линзы – собирающие;
3. В уравнение входит B_z^2 . Фокусирующие свойства не зависят от знака поля;
4. Траектории не меняются если $\frac{B_z^2}{U} = \text{const}$.

5.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАГНИТНЫХ ЛИНЗ

Будем далее считать, что магнитное поле существует только в ограниченной области

$$B_z \neq 0 \quad z \in [z_1, z_2],$$

т.е. пренебрежем «хвостами» распределения магнитного поля – см. рис. 35, и, как обычно, запустим луч параллельно оптической оси.

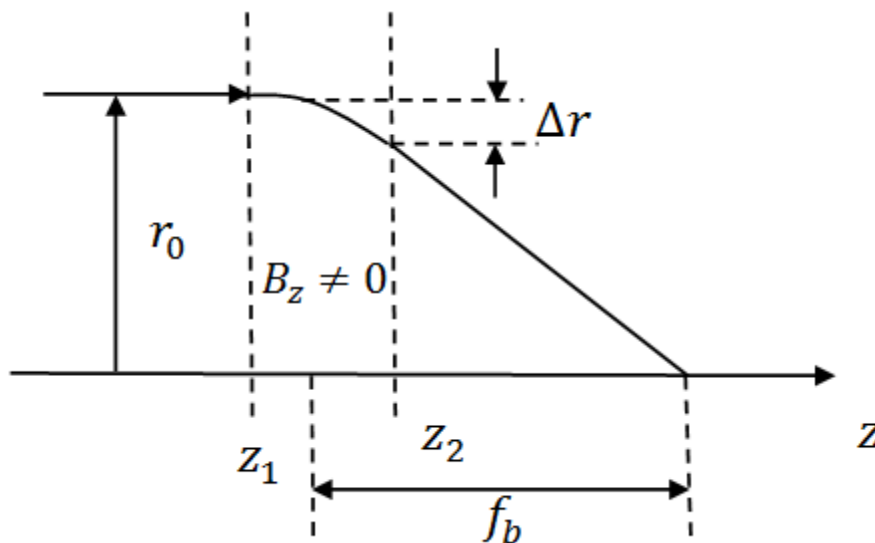


Рис.35. Распространение электронного луча в ограниченной области существования магнитного поля

Классификация магнитных линз проводится по соотношению между толщиной линзы $|z_2 - z_1|$ и фокусным расстоянием f_b следующим образом:

$ z_2 - z_1 \ll f_a, f_b$	Короткие или тонкие
$ z_2 - z_1 \sim f_a, f_b$	Толстые
$ z_2 - z_1 \gg f_a, f_b$	Длинные

1. Короткие магнитные линзы

Пусть имеется короткая магнитная линза, поле которой сосредоточено между плоскостями z_1 и z_2 (рис. 36а). Тогда очевидно качественная картина магнитных силовых линий будет такой, как представлена на рис. 36б. Рассмотрим качественно движение электрона, входящего в линзу параллельно оптической оси.

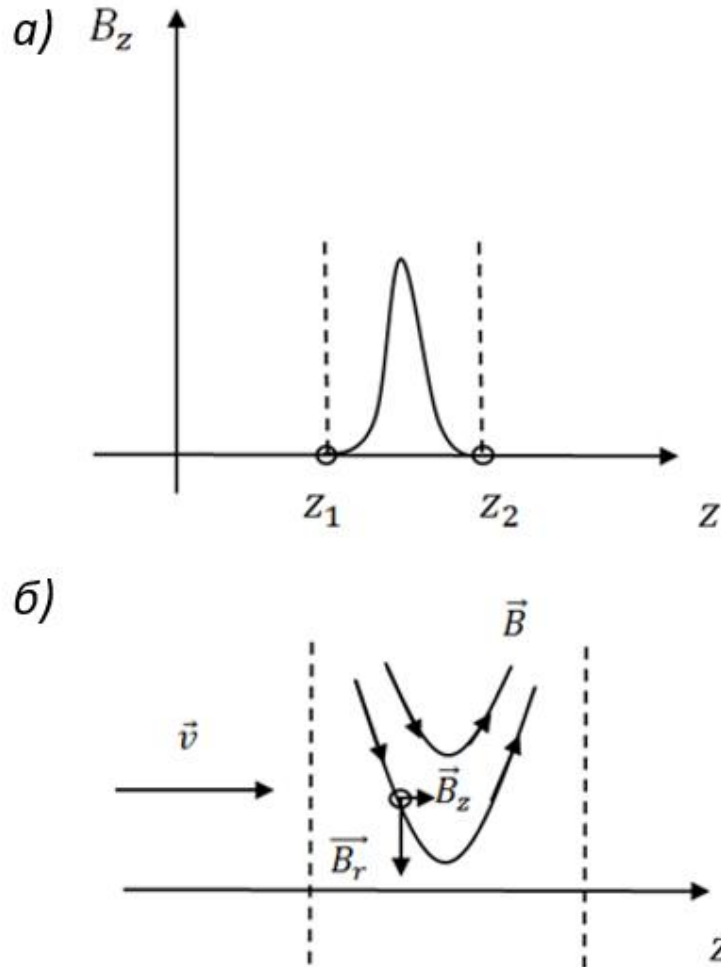


Рис.36. а) Поле короткой магнитной линзы; б) Картина силовых линий магнитного поля короткой магнитной линзы

Магнитное поле имеет две компоненты:

$$\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_z.$$

Рассмотрим их действие на влетающий электрон. Первоначально электрон имеет только v_z компоненту скорости, поэтому возникает сила Лоренца по азимутальному направлению:

$$\vec{F}_{л\phi} = -e_0[\vec{v}_z, \vec{B}_r], \quad (103)$$

направленная против часовой стрелки. Соответственно, действие этой силы приводит к возникновению азимутальной скорости, вследствие чего появляется компонента силы Лоренца по радиальному направлению, причем, как легко заметить,

$$\overline{F_{lr}} < 0,$$

т.е. она смещает электрон к оси. С другой стороны, поскольку магнитный поток через катод равен нулю (поле вне линзы равно нулю), согласно теореме Буша угловая скорость

$$\dot{\phi} = \frac{\eta\psi}{2\pi r^2} > 0.$$

Здесь ψ – магнитный поток через окружность радиуса r , на котором в текущий момент находится электрон. Следовательно, электрон вращается по азимуту все время в одну сторону и в любой момент времени радиальная сила направлена к оси. Уже отсюда следует, что линза – собирающая. Найдем фокусное расстояние линзы. Рассмотрим луч, входящий в линзу параллельно оптической оси и проинтегрируем уравнение параксиальных траекторий по области линзы.

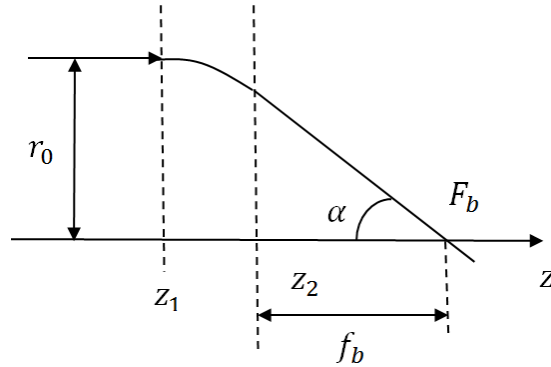


Рис.37. Электронный луч, входящий в магнитную линзу параллельно оптической оси

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 r}{dz^2} dz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\eta B_z^2 r}{8U} dz. \quad (104)$$

Тогда (при $r = r_0 = const$) получаем:

$$\frac{dr}{dz} \Big|_{z_1}^{z_2} = - \frac{\eta r_0}{8U} \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 dz. \quad (105)$$

Поскольку

$$\frac{dr}{dz} \Big|_{z_1} = 0, \quad \frac{dr}{dz} \Big|_{z_2} = -tg\alpha, \quad tg\alpha = \frac{r_0}{f_b},$$

то

$$\frac{1}{f_b} = \frac{\eta}{8U} \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 dz. \quad (106)$$

Поскольку вне области линзы поле равно нулю (стремится к нулю), а несобственные интегралы в бесконечных пределах брать легче, последнюю формулу обычно переписывают в виде

$$\frac{1}{f_b} = \frac{\eta}{8U} \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz. \quad (107)$$

2. Сильные магнитные линзы

При расчетах магнитных линз часто используют так называемую колоколообразную аппроксимацию магнитного поля (см. рис. 38 слева) в виде

$$B_z = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}. \quad (108)$$

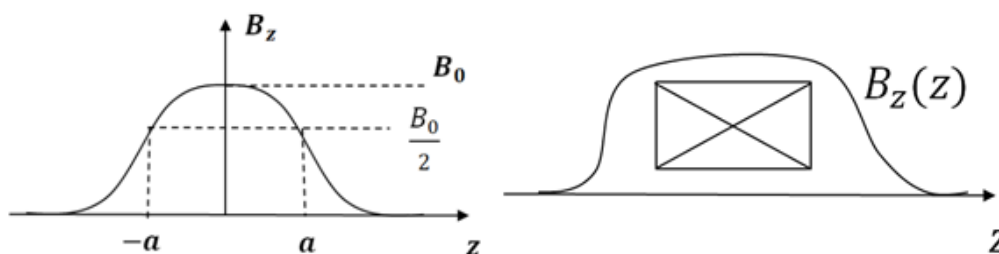


Рис.38. Колоколообразное распределение (слева) и поле соленоида (справа)

Здесь B_0 – поле в центре линзы, a – полуширина линзы (расстояние, на котором поле падает в 2 раза). Тогда, подставляя это выражение в формулу для фокусного расстояния, можно показать, что оптическая сила линзы

$$\frac{1}{f} \sim \frac{B_0^2}{a}. \quad (109)$$

Т.е. для увеличения оптической силы линзы надо либо увеличивать магнитное поле, либо уменьшать область локализации

поля a . Пусть у нас есть соленоид (см. рис. 38 (справа)) сможем ли мы обеспечить $\frac{1}{f} \rightarrow \infty$ если $B_0 \rightarrow \infty$.

Рассмотрим качественно поведение электронных траекторий при различной величине максимального магнитного поля (см. рис. 39).

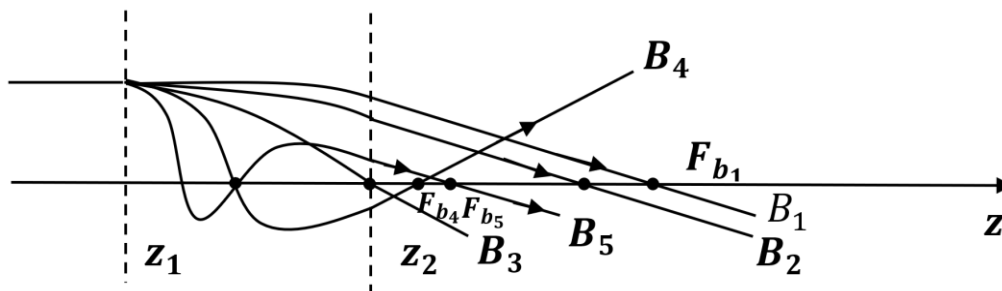


Рис.39. Качественное поведение электронных траекторий при различной величине максимального магнитного поля

Пусть сначала поле маленькое и равно B_1 . Тогда линза тонкая, и электронная траектория мало меняет свое радиальное положение внутри линзы и пересекает ось системы в точке фокуса F_{b1} . Увеличим магнитное поле до значения B_2 , тогда луч внутри линзы начнет отклоняться сильнее, а точка фокуса сдвинется ближе к линзе в положение F_{b2} , и так далее. Наконец, наступит такой момент, что при поле B_3 точка фокуса F_{b3} сместится на правый край линзы (очевидно, что это, в соответствии с нашим определением, случай сильной линзы). Что будет, если мы начнем увеличивать магнитное поле дальше? Тогда, при поле $B_4 > B_3$ электронная траектория пересечет ось уже внутри линзы. Но поскольку радиальная сила в линзе все время направлена к оси (см. теорию тонкой линзы), то далее электронная траектория начнет разгибаться и еще раз пересечет ось уже вне линзы в точке фокуса F_{b4} , а сама траектория дает нам расходящийся луч. Т.е. появилось два фокуса, а сама линза стала рассеивающей! Продолжая эти рассуждения дальше, для еще больших магнитных полей, получим, что при поле B_5 траектория уже дважды пресечёт ось внутри линзы, а всего фокусов будет три, и линза вновь станет собирающей. Таким образом, при поле больше B_3 возникает **явление многократной фокусировки**.

Будет ли увеличиваться оптическая сила линзы, если наблюдается многократная фокусировка? Очевидно, что оптическая сила линзы определяется положением последнего фокуса. А он в этом режиме находится правее положения F_{b3} , следовательно, в режиме многократной фокусировки оптическая сила будет падать. Поэтому,

если мы хотим еще увеличить оптическую силу, необходимо сокращать область локализации магнитного поля, т.е. полуширину поля a . Сделать это можно, окружив соленоид ферромагнитным экраном, как показано на рис. 40.

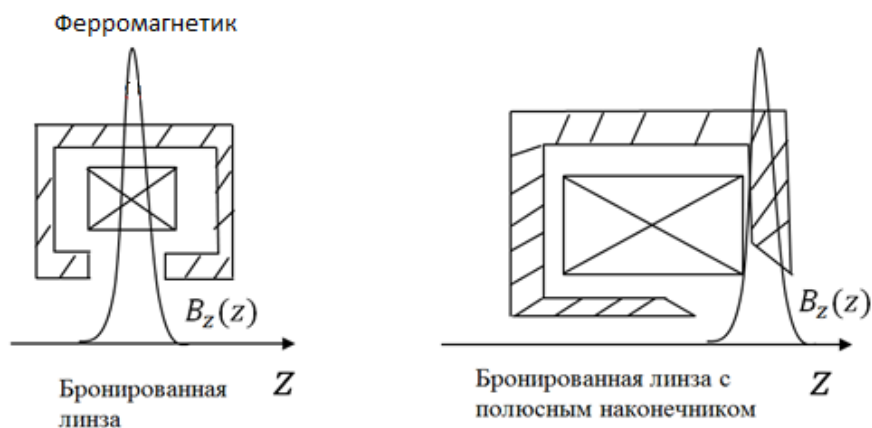


Рис.40. Использование соленоида, окруженного ферромагнитным экраном

Расчет сильной магнитной линзы.

Используем опять колоколообразную аппроксимацию магнитного поля (см. рис. 38) (108). Тогда, подставляя поле в уравнение параксиальных траекторий, получаем, что

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{\eta B_0^2 r}{8U \left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2} = 0. \quad (110)$$

Сделаем здесь замену переменных на нормированные длину и радиус как

$$y = \frac{r}{a}, \quad x = \frac{z}{a}.$$

И введем безразмерный параметр

$$k^2 = \frac{\eta B_0^2 a^2}{8U}. \quad (111)$$

Тогда уравнение (110) приводится к виду

$$y'' = -\frac{k^2 y}{(1 + x^2)^2}. \quad (112)$$

Полученное уравнение путем двух замен переменных можно свести к уравнению гармонического осциллятора. Делая обратную замену переменных, можно показать, что

$$r = a \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \{C_1 \sin [\sqrt{1 + k^2} \arctg (\frac{a}{z})] + C_2 \cos [\sqrt{1 + k^2} \arctg (\frac{a}{z})]\}. \quad (113)$$

Для определения констант интегрирования C_1 , C_2 зададим начальные условия на бесконечности. Поскольку нас интересует положение фокусов в линзе, то надо запустить луч параллельно оптической оси, значит

$$\begin{cases} r(-\infty) = r_0 \\ r'(-\infty) = 0 \end{cases}$$

Тогда, приравнявая r к нулю, получаем положение фокусов:

$$f_2 = -f_1 = \frac{a}{\sin \left[n \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^2}} \right]}, \quad n = 1, 2, \dots, n_{max}, \quad (114)$$

где

$$n_{max} < \sqrt{1 + k^2}.$$

Таким образом, при

$$\begin{array}{ll} k^2 < 3 - 1 & \text{пара фокусов,} \\ 3 < k^2 < 8 - 2 & \text{пары фокусов,} \\ 8 < k^2 < 15 - 3 & \text{пары фокусов} \\ & \text{и т.д.} \end{array}$$

Следовательно, увеличивать индукцию магнитного поля с целью увеличения оптической силы линзы имеет смысл только до значения

$$k^2 = \frac{\eta B_0^2 a^2}{8U} = 3. \quad (115)$$

3. Длинная магнитная линза

Пусть $B_z \rightarrow \infty$ или $U \rightarrow 0$ тогда $k^2 \rightarrow \infty$. Следовательно, число фокусов $n_{max} \rightarrow \infty$. Поскольку ширина линзы конечна, в области линзы $z \in [z_1, z_2]$ расстояние между соседними фокусами $\Delta f \rightarrow 0$. И это означает, что мы, по определению, получаем случай длинной магнитной линзы. В то же время расстояние между фокусами можно рассматривать как характерный масштаб электронной траектории, а ширину линзы – как масштаб неоднородности магнитного поля. Следовательно, мы приходим к ситуации, когда масштаб траектории много меньше масштаба магнитного поля, т.е. к случаю адиабатического магнитного поля. Предельным и самым простым случаем такого поля является **случай однородного магнитного поля**. Рассмотрим этот случай подробнее. Итак,

$$B = const, \quad r' \ll 1, r\varphi' \ll 1,$$

следовательно,

$$\sqrt{1 + r'^2 + r^2\varphi'^2} \approx 1, \text{ т.е. } v \approx v_z. \quad (116)$$

Найдем шаг электронной траектории:

$$h = v_{||}T_c = vT_c = \sqrt{2\eta U} \frac{2\pi}{\eta B} = const. \quad (117)$$

Т.е. для всех электронных траекторий шаг одинаков. Следовательно, если у нас есть некоторая точка A , и из нее выходит пучок параксиальных траекторий, то через каждый шаг траектории они будут опять собираться в точку и давать изображения точки A , как это показано на рис. 41. Отметим, что изображение образуется именно через шаг, а не полшага, поскольку частицы совершают еще и азимутальное движение (см. левое изображение на рис. 41).

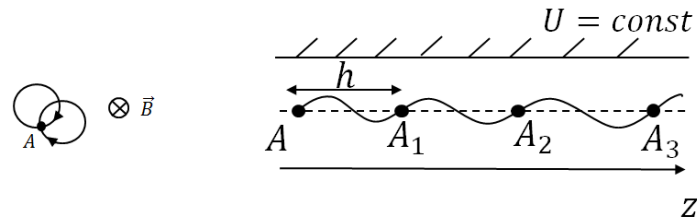


Рис. 41. Образование изображения в однородном поле проекции электронной траектории на меридиональную и азимутальную плоскости

Но случай однородного поля неинтересен с практической точки зрения, поскольку здесь происходит просто перенос изображения и коэффициент увеличения равен 1. Как получить увеличенное изображение? Поскольку у нас выполнены условия адиабатического приближения, то ведущий центр электрона подчиняется уравнению

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2} - \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2\eta B^3} [B, \nabla B] \approx v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B}. \quad (118)$$

Второе слагаемое в нашем случае равно нулю, а третье много меньше первого. Поэтому частица движется вдоль магнитной силовой линии. Тогда для получения увеличенного изображения, очевидно, нужно сформировать расходящееся магнитное поле.

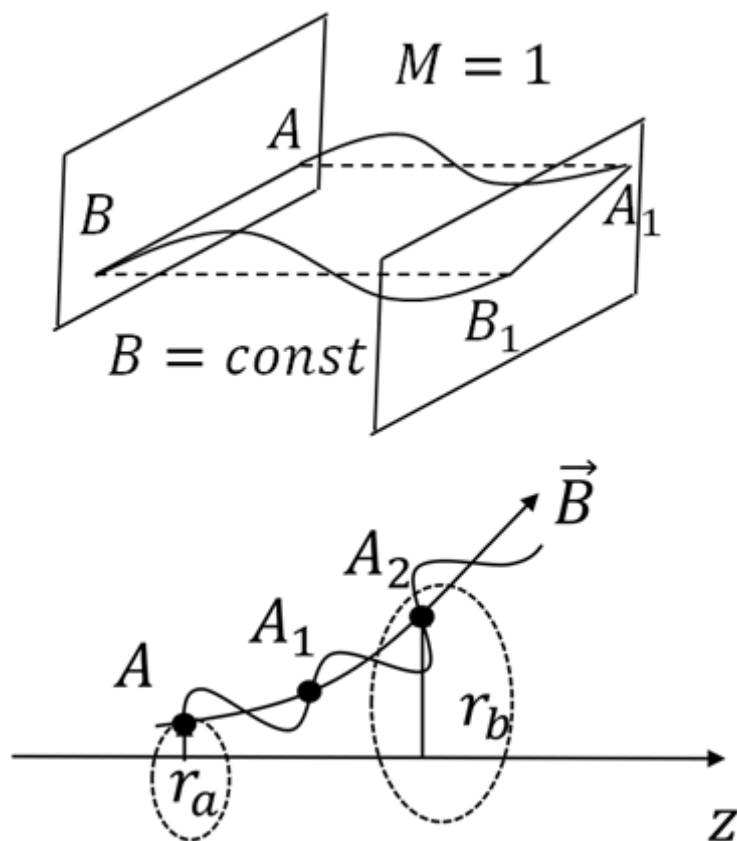


Рис.42. Формирование изображения в однородном и расходящемся магнитном поле

Таким образом, увеличение будет равно отношению радиусов магнитной силовой линии в двух плоскостях. Как известно, поток

магнитного поля внутри магнитной силовой линии сохраняется, поэтому

$$\Psi_a = \Psi_b. \quad (119)$$

Поскольку магнитное поле слабонеоднородно, то

$$\Psi_a = \pi r_a^2 B_a, \quad \Psi_b = \pi r b^2 B_b. \quad (120)$$

И из равенства потоков следует, что коэффициент увеличения

$$M = \frac{r_b}{r_a} = \sqrt{\frac{B_a}{B_b}}. \quad (121)$$

6. ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ

Оптические микроскопы не могут быть применены для увеличения объектов, размеры которых не превышают половины длины волны видимого света 200 нм. Для преодоления возникшего барьера необходимо перейти к использованию увеличивающих устройств, использующих излучение с меньшей длиной волны, т.е. имеющего не световую природу.

Тот факт, что электрон обладает волновыми свойствами, может быть использован для снижения минимально различимого устройством объекта до нескольких Ангстрем, на чем и основан принцип действия электронных микроскопов. В электронном микроскопе вместо светового излучения используется излучение электронных пучков, имеющее значительно более короткую длину волны, а вместо оптических линз – электронные и магнитные линзы. Различают два основных направления электронной микроскопии: трансмиссионную (просвечивающую) и растровую (сканирующую), основанных на использовании соответствующих типов электронных микроскопов.

6.1. ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ ПРОСВЕЧИВАЮЩЕГО ТИПА

Как следует из названия, принцип действия просвечивающего электронного микроскопа основан на прохождении электронного пучка сквозь исследуемый образец и взаимодействии с ним.

Исследуемые при помощи просвечивающего электронного микроскопа образцы должны быть достаточно тонкими, так как их толщина определяет детализацию изображения.

1. Принцип действия

Рассмотрим принцип действия микроскопа на следующем примере. Пусть у нас есть однородный тонкий образец, на котором есть утолщение (точка А), и на этот образец по нормали падает моноэнергетичный пучок электронов. Тогда в области однородного участка (точка В) электроны пройдут сквозь образец без рассеивания, а в области утолщения электроны испытают упругое рассеяние, и часть из них отклонится от направления нормали. Поставим дальше диафрагму, чтобы перехватить отклоненные электроны, а затем – увеличивающую линзу и экран. Тогда интенсивность свечения экрана будет такой, как показано на рис. 43. Т.е. мы получим темную точку на светлом фоне. Это так называемое светлопольное изображение. Недостатком светлопольного изображения является низкая контрастность: человеческому глазу трудно различать на белом поле маленькую темную точку.

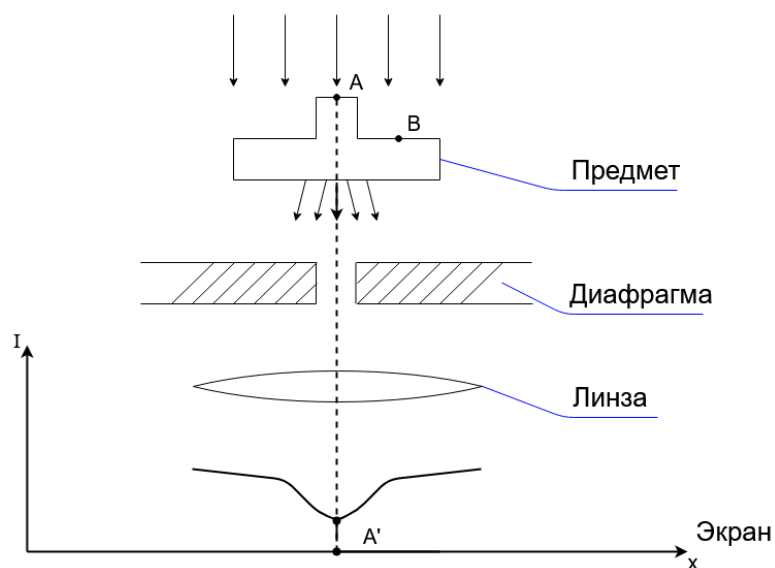


Рис.43. Получение светлопольного изображения при помощи электронного микроскопа просвечивающего типа

Если наоборот пропустить только рассеянные лучи, то мы получим темнопольное изображение, где контрастность будет лучше. Для этого надо сдвинуть диафрагму так, как показано на рис. 44.

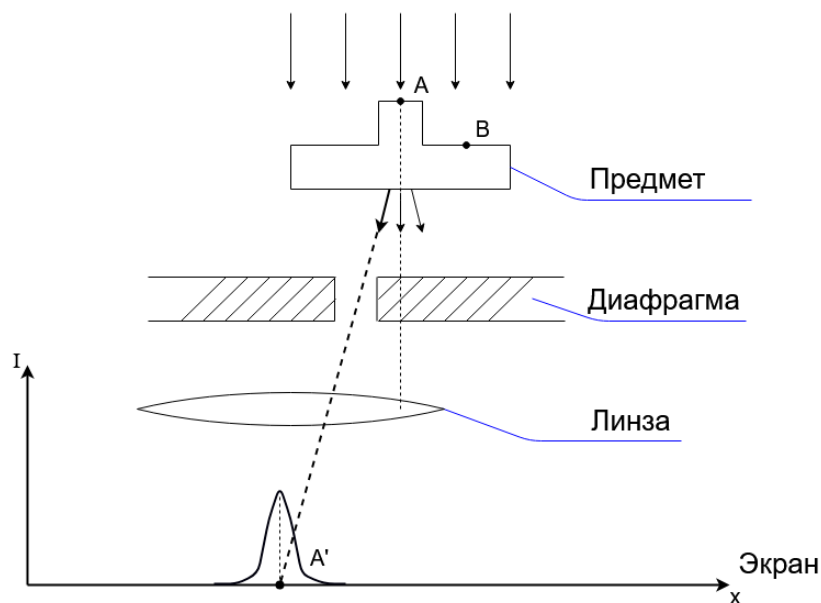


Рис.44. Получение темнопольного изображения при помощи электронного микроскопа просвечивающего типа

Следует отметить, однако, что в случае темнопольного изображения возрастают aberrации (искажения) изображения, т.к. электроны идут под большими углами к оси (нарушается второе условие параксиальности (55)) и имеют больший разброс энергий, что приводит и к так называемой хроматической aberrации.

2. Устройство микроскопа

Устройство микроскопа приведено на рис. 45. Он состоит из вакуумной колонны, внутри которой расположены иммерсионный объектив, магнитная линза конденсор, предмет, и далее еще две увеличивающие магнитные линзы: объектив и проекционная линза для окончательного формирования изображения на экране. Иммерсионный объектив вместе с линзой-конденсором создают уменьшенное изображение кроссовера на тонком предмете. Апертурные углы для уменьшения aberrаций (возникающих вследствие нарушения параксиальности) выбираются очень маленькими – порядка 1 градуса.

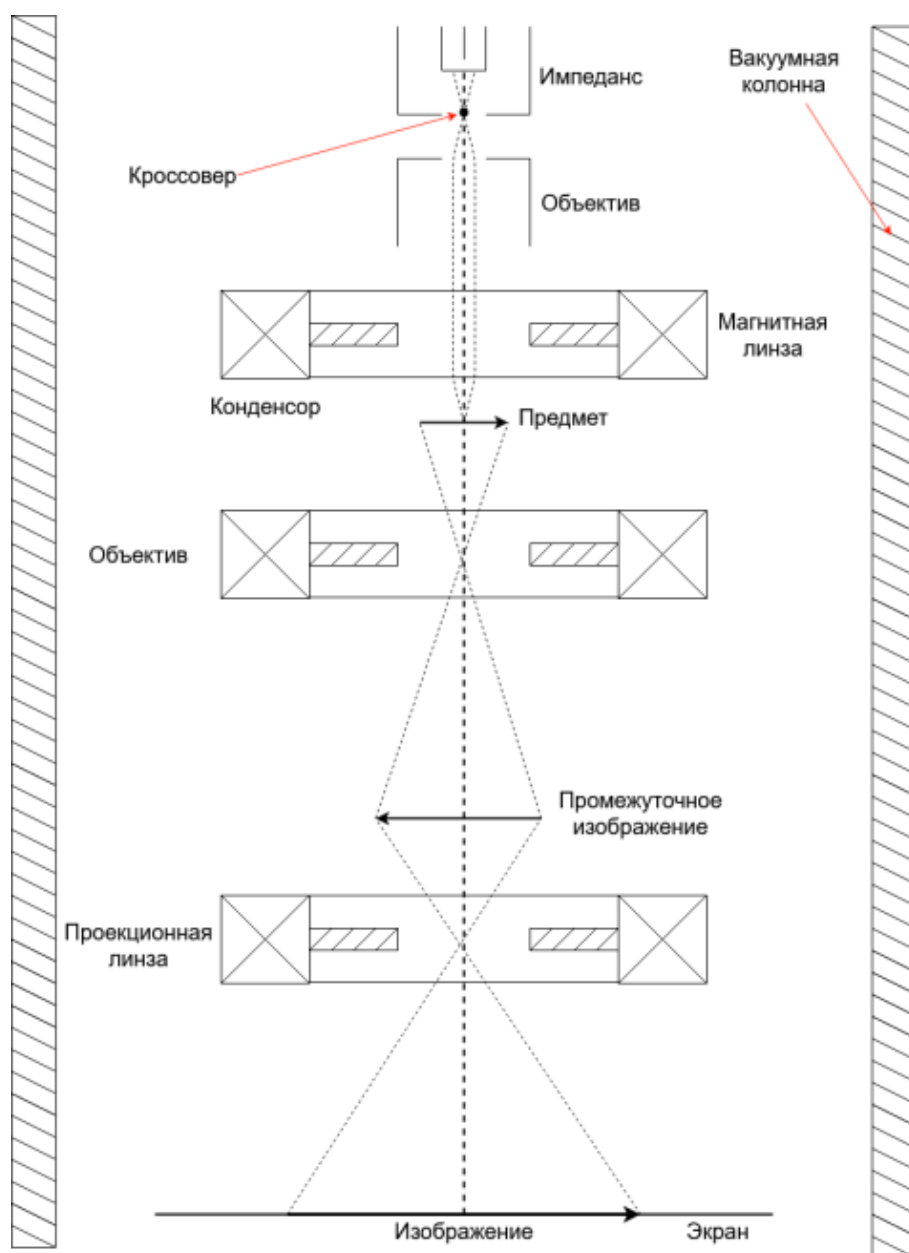


Рис.45. Устройство электронного микроскопа просвечивающего типа

3. Разрешающая способность просвечивающего микроскопа

Казалось бы, если после предмета поставить много линз, то коэффициент увеличения $M \rightarrow \infty$? Но оказывается, даже если полностью устранить aberrации (способы их снижения существуют, хотя мы на этом и не будем останавливаться), предельная разрешающая способность микроскопа ограничена явлением дифракции.

Как известно из световой оптики, если у нас есть линза с апертурным углом u , то изображение точки A на экране вследствие дифракции на самом деле получается в виде системы колец, интенсивность свечения которых показана справа на рисунке. Поэтому для того, чтобы различить две соседние точки A и B , необходимо, чтобы максимум интенсивности для точки B совпал с минимумом интенсивности для точки A .

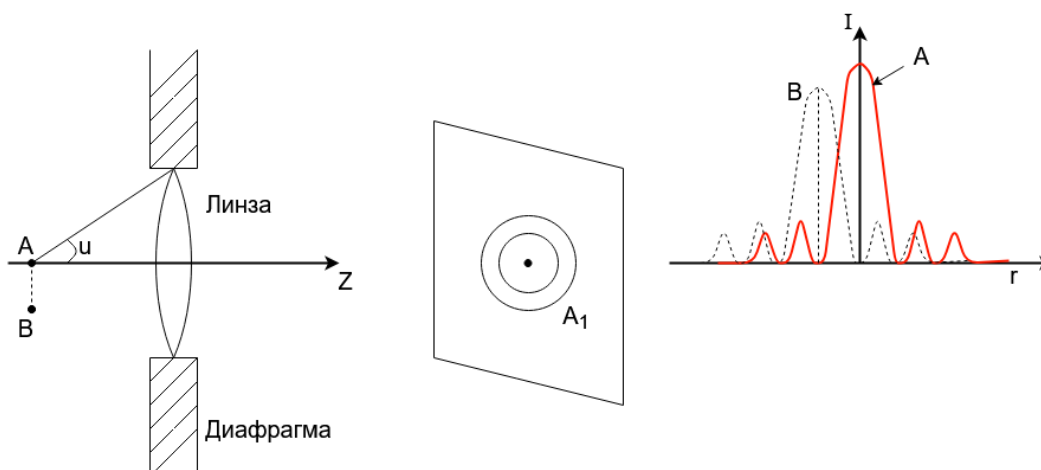


Рис.46. Изображения точек вследствие дифракции на линзе с апертурным углом u . Условие различимости соседних точек на экране микроскопа

Из этого условия следует, что разрешающая способность

$$d_{AB} = \frac{0,61\lambda}{\sin u}. \quad (122)$$

Здесь λ – длина волны. Для электрона в качестве λ следует взять длину волны Де-Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (123)$$

Сделаем оценки. Пусть у нас $U = 100$ кВ тогда замедление $\xi = \frac{16}{\sqrt{U}}$ и скорость электрона $v = 2 \times 10^8$ м/с.

Подставляя все эти величины в формулу для длины волны, получаем, что

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^8} = 0,03 \text{ \AA}. \quad (124)$$

Тогда, казалось бы, можно легко рассмотреть даже отдельные атомы, но на самом деле надо учесть, что апертурные углы очень малы $u < 1^\circ$, соответственно $\Rightarrow \sin u \approx 0,01$ и $d_{AB} \approx 3 \text{ \AA}$.

Хотя в большинстве современных просвечивающих электронных микроскопов используются ускоряющие напряжения от 100 кВ до 300 кВ, было также создано несколько сверхвысоковольтных приборов (HVEM или СВЭМ) с ускоряющим напряжением до 3 МВ. Основной мотивацией для создания таких приборов является то, что при повышении энергии электрона уменьшается его длина волны де Бройля, и таким образом снижается дифракционный предел для пространственного разрешения. Несколько таких приборов еще находятся в эксплуатации, и они имеют преимущество для наблюдения толстых образцов, поскольку электроны очень высокой энергии могут глубоко проникать в твердые образцы (более 1 мкм) без существенного рассеяния.

6.2. ОТРАЖАТЕЛЬНЫЙ МИКРОСКОП

Отражательный микроскоп предназначен для получения изображения толстых объектов. Его устройство аналогично просвечивающему. Отличие состоит только в том, что оси иммерсионного объектива, магнитной линзы – конденсора и двух увеличивающих линз, стоящих после предмета, развернуты на некоторый угол 2α . Поэтому ниже мы приведем только часть схемы микроскопа, показывающей, как электронный луч подходит к поверхности образца и как от него улетают отраженные частицы (см. рис. 47). Падение луча на образец почти скользящее (угол α порядка 10°), число отраженных частиц, проходящих сквозь диафрагму, зависит от рельефа поверхности образца и условий отражения, поэтому интенсивность свечения экрана также зависит от рельефа поверхности, и мы получаем электронное изображение поверхности. Некоторым недостатком указанной схемы является разный коэффициент увеличения по разным осям: $M_x = M_y \sin \alpha$. Однако указанный недостаток может быть нивелирован путем компьютерной обработки изображения. Разрешающая способность такого микроскопа $d_{AB} \approx 500 \text{ \AA}$.

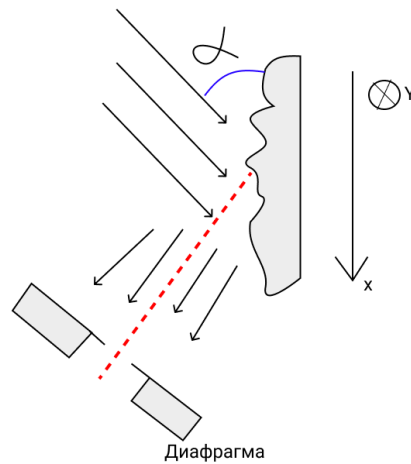


Рис.47. Падение луча на образце в отражательном микроскопе.

6.3. РАСТРОВЫЙ МИКРОСКОП

Схема растрового микроскопа приведена на рис. 48. Он состоит из двух частей – **системы сканирования объекта** (справа) и **системы получения электронного изображения** (слева). Разберем сначала работу системы сканирования. Иммерсионный объектив вместе с парой магнитных линз формируют на объекте уменьшенное изображение кроссовера. После линз находится система сканирования электронного луча: горизонтальные и вертикальные отклоняющие пластины, на которые с блока развёртки подается пилообразное напряжение. В результате электронный луч двигается по поверхности образца и вычерчивает на его поверхности растр, как в старых телевизорах (растр показан на выноске).

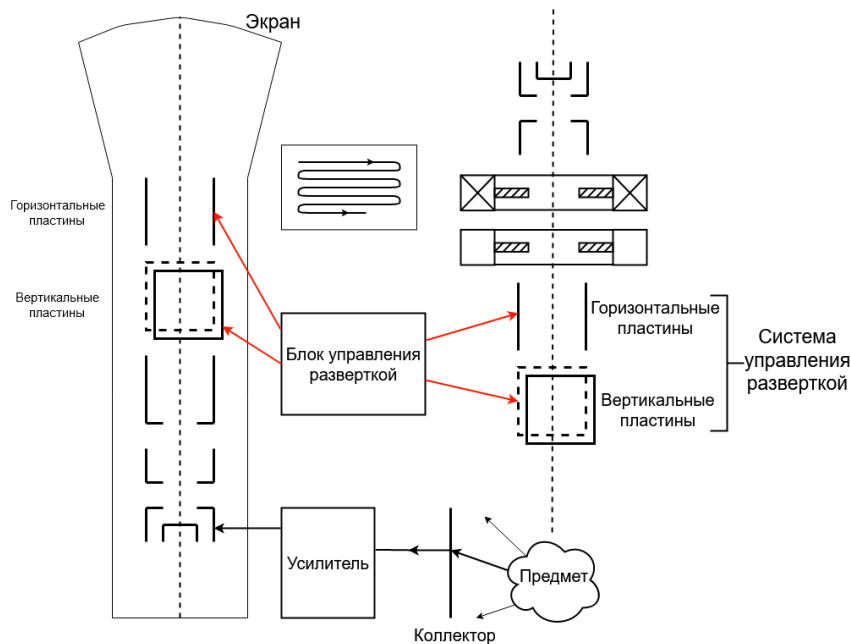


Рис.48. Устройство растрового электронного микроскопа

В каждой точке образца, куда попадает электронный луч, происходит отражение электронов от поверхности, и эти электроны далее попадают на коллектор. Число отраженных электронов (ток отраженных электронов) определяется рельефом образца. Далее ток отраженных электронов подается на усилитель, а сигнал с усилителя – на модулятор электронно-лучевой трубки, поэтому яркость точки на экране ЭЛТ зависит от рельефа образца. В электронно-лучевой трубке также производится сканирование луча, которое осуществляется синхронно с движением электронного пучка по поверхности образца. Поэтому на экране мы получаем увеличенное изображение поверхности исследуемого предмета. Разрешающая способность микроскопа $d_{AB} = 500 \text{ \AA}$.

6.4. ПРОЕКЦИОННЫЕ МИКРОСКОПЫ

Проекционные микроскопы бывают двух типов – автоэлектронные и автоионные.

1. Автоэлектронный микроскоп

Конструктивно автоэлектронный микроскоп состоит из катода в виде длинной тонкой иглы с радиусом закругления r порядка 100 \AA и экрана-анода, представляющего собой часть сферы.

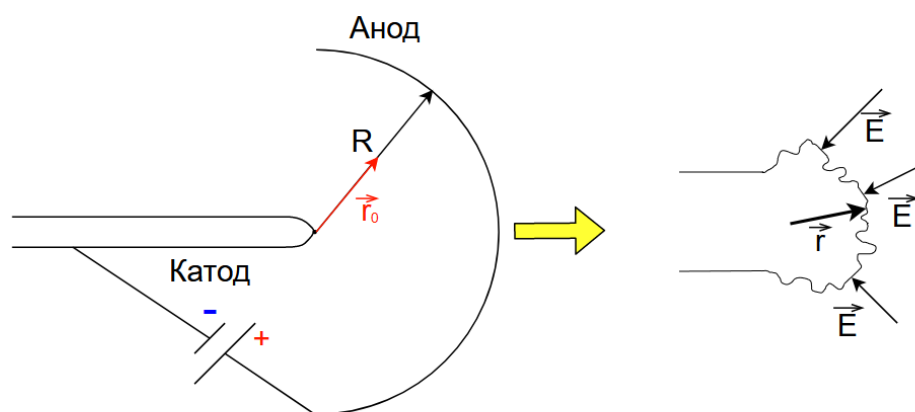


Рис.49. Принцип действия автоэлектронного проекционного микроскопа

В этом случае возникающее между катодом и анодом электрическое поле **чисто радиальное** и при типичном напряжении в несколько киловольт может быть оценено как

$$E_k \approx \frac{U_a}{r}. \quad (125)$$

Легко оценить, что при указанных напряжениях и радиусах $E_k \sim 10^7$ В/см, что приводит к автоэлектронной эмиссии из катода. Реальная поверхность иглы отличается от сферической (см. правое изображение на рис. 49). Введем еще нормаль к катоду \vec{n} . Поскольку электрон движется вдоль электрического поля, то легко понять, что при $\vec{n} \parallel \vec{r}_0$ электрон попадает на экран и дает засветку, если же $\vec{n} \nparallel \vec{r}_0$ соответствующий участок экрана не освещается. Увеличение

$$M = \frac{R}{r} \approx 10^5 - 10^6. \quad (126)$$

Разрешающая способность

$$d_{AB} \approx 10 \text{ \AA}.$$

Ограничение разрешающей способности связано с тем, что электрон- частица легкая, поэтому даже небольшая по величине тепловая скорость уже приводит к размытию изображения. Для уменьшения этого эффекта необходимо увеличить массу частицы. Соответственно, возникла идея взять вместо электрона ион, масса которого, по крайней мере, в несколько тысяч раз больше электронной. Так возникла идея автоионного микроскопа.

2. Автоионный микроскоп

В отличие от электрона, энергия связи иона в кристаллической решетке на порядки превышает высоту потенциального барьера, что делает нереальным задачу о выходе иона из твердого тела. Поэтому для получения ионов в систему напускают газ (обычно водород или гелий) при низком (10^{-3} мм. рт. ст.) давлении. Когда молекула газа подходит к острию на расстояние порядка 1-2 ангстрем, она поляризуется и разрывается вследствие действия на нее очень сильного электрического поля. Получившийся в этом случае **положительный** ион имеет нулевую начальную скорость и образуется на расстоянии порядка 1 ангстрема от поверхности, поэтому он дальше ведет себя точно так же, как электрон в автоэлектронном микроскопе. В результате на поверхности экрана получается увеличенное изображение катода. Разрешающая способность такого микроскопа доходит до $d_{AB} \approx 1 - 2 \text{ \AA}$.

Катод



Молекула

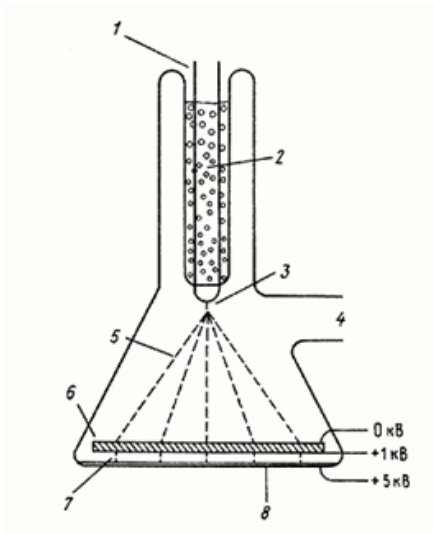
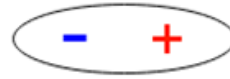


Схема конструкции автоионного микроскопа.

1 – вводы для нагрева и охлаждения образца;

2 – охлаждающая жидкость;

3 – образец;

4 – вакуумирование и напуск газа;

5 – траектории ионов;

6 – усилитель яркости изображения на основе микроканальной пластины;

7 – траектории электронов;

8 – люминесцентный экран.

Рис.50. Принципиальная схема автоионного микроскопа

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amelinckx S., Dyck van D., Landuyt J. van, Tendeloo van. G. Electron Microscopy: Principles and Fundamentals. – John Wiley & Sons, 2008. – 527 p.
2. Цимринг Ш. Е. Введение в высокочастотную вакуумную электронику и физику электронных пучков. - Нижний Новгород: Ин-т прикладной физики, 2012. – 575 с.
3. Молоковский С. И., Сушков А. Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. - М. : Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
<http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=77330&idb=0>
4. Кельман В. М., Явор С. Я. Электронная оптика. - Л. : Наука, Ленингр. отделение, 1968. – 487 с.
<http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=86146&idb=0>
5. Глазер В. Основы электронной оптики. – М.; государственное издательство теоретико-технической литературы, 1957. – 764 с.
6. Монастырский М.А. «Метод τ -вариаций и некоторые вычислительные проблемы электронной оптики динамических эмиссионных систем», Прикладная физика, №3, 1996 г., С. 7-27.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. 1, Механика. – М., Наука, 1988. – 216 с.
<https://znanium.com/catalog/document?id=369177>.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛИНЗЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ МИКРОСКОПЫ

Авторы:

Владимир Николаевич Мануилов

Владислав Юрьевич Заславский

Полина Дмитриевна Лихтерова

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать 30.05.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4 п. л. Уч.-изд. л. 6,1.
Заказ № 152. Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского.
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.